# 금융공학12 - Barrier Option

2007년 5월 1일 화요일
오후 1:01

- **Exotic Option (이색 옵션) 이란?**

  이것이야말로 중요하다. 이거 만들어서 히트를 치면 책에 실리는 옵션이 되는 것이다. Hull 책 22장에 보면 이색 옵션들이 죽 설명되어 있다. 이걸 다 설명할 수는 없으니, Barrier option 하나만 설명하도록 하겠다.
  사람들이 많이 알면 regular, 잘 모르면 exotic option이 되는 것이다. 사실 초창기에는 American option이 exotic option이었다. 그런 의미에서 barrier option은 점점 더 regular 해지고 있다.

- **Barrier option [교과서 533-535]**

  European 콜옵션을 이야기 할 때 반드시 알아야 할 2가지 숫자
  1) **행사 가격(K)**
  2) **만기(T)**

     이것을 알면 이 옵션의 모든 성격을 다 유추해 낼 수 있다. 그런데 배리어 옵션은 여기에 하나를 더 추가한다.

  3) **Knock-in/Knock-out (H) (<- 장벽)**

     - **Knock in**: barrier 에 도달하면 (부딪히면) 이 옵션은 regular한 call/put option으로 변해버린다. 그 전에는 Nothing이다. 즉 무조건 이 barrier를 한 번 쳐야지만 call/put 옵션이 될 수 있다.
     - **Knock out**: 이건 regular call/put option으로 시작하지만, 일단 주가가 barrier를 한 번 치면 없어진다. 즉 nothing이 된다.

  그래서 이건 payoff를 그릴 수 없다. 콜옵션의 payoff는 그 이전에 얼마가 되었느냐에 관계없이 만기시점에 변한다는 의미인데, barrier는 이러한 그



림이 되지 않는다. 따라서 Barrier에 부딪혔는지 안 부딪혔는지 알아야 하며 이 때문에 Barrier option은 path dependent 한 옵션으로 분류된다.

- **Barrier 옵션의 종류**

  이 Barrier 옵션에는 Asian 옵션, Lookback 옵션이 있다.

  - **Asian option [교과서 538-539]**
    이는 행사 시점과 전혀 무관하다. Asian option은 만기시의 payoff가 매일매일 주가 평균값과 행사가격의 차이이다. (즉 K-$S_{avg}$) 즉 이전의 값들도 죽 다 알고 있어야 한다.

  - **Lookback option [교과서 536-537]**
    Lookback 옵션은 $S_{max}$ - K 형태가 된다. 가장 큰 놈이랑 K 랑 차이가 나는 경우이다. 이 옵션도 과거의 값을 다 알아야 구할 수 있다.

  그렇다면 왜 사람들이 배리어 옵션에 관심을 갖는가? OTC 상에서 거래되고 있는 상품 중 가장 많은 것은 Swap이다. (거래 규모로는 가장 많다) 그리고 exotic option 중에서는 barrier 옵션이 가장 많이 거래된다.

- **Up-and-in & Down-and-in**

  Knock-in / Knock-out 중에서도 Up-and-in과 Down-and-in 종류가 있다. 이건 배리어가 기초자산 가격보다 위에 있으면 Up이고 아래 있으면 Down이 된다. (크게 중요한 것은 아니다)

  아래와 같은 Barrier option이 있다고 해 보자.
  $S_0$ = 100
  K = 90
  H = 110
  T = 0.25

그런데 이게 Knock-and-in 이라고 해 보자. 이 경우 배리어를 한 번 쳐야 콜옵션으로 변하므로, 극단적으로 말해 100에서 죽 유지되는 경우에는 아무것도 못 받게 된다. 그런데 S가 올라서 200이 되면 일단 중간에 110을 한 번 치므로 Regular call option으로 변하며, 이 때의 행사가격은 90이 된다. 따라서 200-90=110의 payoff를 받을 수 있다.

그리고 Knock-out 옵션인 경우에는 배리어를 치기 전까지는 Regular call option이므로, 행사 가격 90이니까 100-90 = 10 의 Payoff를 받을 것이다. 반면 주가가 200으로 오르면 배리어를 치면서 소멸하므로 아무것도 받지 못하게 될 것이다.

그럼 사람들이 왜 이렇게 귀찮은 것을 만들었는가?

- **Barrier option parity**

Simple relationship 부분을 보면, Regular call = up-and-out call + up-and-in call라는 공식이 성립한다.

**즉 UO Call은 주가가 위로 올라가서 배리어 H에 부딪히면 Regular 가 소멸하고, UI Call은 주가가 위로 올라가서 배리어 H에 부딪히면 Regular 가 생기기 때문에 결국 이 2개를 합치면 그냥 Regular Call이 되는 것이다.**



**Simple Relationship**

Regular Call = Up-and-Out Call + Up-and-In Call

| | | |
|---|---|---|
| | Barrier = 110 | Barrier = 110 |
| Spot = 100 | Spot = 100 | Spot = 100 |
| Strike = 90 | Strike = 90 | Strike = 90 |
| Rf = 5% | Rf = 5% | Rf = 5% |
| Vol = 30% | Vol = 30% | Vol = 30% |
| T = 0.25 year | T = 0.25 year | T = 0.25 year |

Regular Call = DO Call + DI Call
Regular Put = UO Put + UI Put
Regular Put = DO Put + DI Put

예를 들어

100에서 시작해서 110을 치고 200이 되었다고 해 보자. 그럼 A는 200-90 만큼의 돈을 가지게 된다. B도 똑같이 200-90의 돈을 가지게 된다. 왜냐하면 Up-and-out call 옵션은 사라져 죽고, Up-and-in call이 regular로 바뀌기 때문이다.

따라서 regular option의 가격은 이 둘을 합한 것과 같다. **따라서 개개의 배리어 옵션은 regular call option의 가격보다 작거나 같아야 한다.** 다만 같은 경우가 있긴 있는데, 이는 비현실적인 case일 때이다. 즉 현재 주가가 100인데 1달 안에 5억이 되는 것? 이 경우는 비현실적이므로 가치는 Zero가 된다.

그렇다면 이것을 어디에 쓸까? 내가 미래에 대한 예측을 꽤 잘 한다고 생각해 보자. 즉 3개월 안에 주가가 200까지 간다고 해 보자. 이 때 regular call option보다는 barrier call option이 더 싸기 때문에 이걸 사는 것이 콜 옵션을 사는 것보다는 더 낫다는 것이다. **즉 더 적은 금액으로 같은 돈을 벌 수 있다.**

- **활용 - 원금 보장형 펀드**

예를 들어서 펀드 중에 이런 종류의 상품들이 있다. 최소한 원금은 보장해 주는 상품이 있다. 그런데 주가가 오르면 거기에 해당하는 수익률을 준다. 예를 들어 주가가 20% 올라가면 여기에 0.45 곱해서 이만큼 더 주는 경우도 있다. 이런 펀드를 어떻게 만들 수 있는가?

예를 들어 누군가가 내게 100억을 맡겼고, 만기는 3년이라고 해 보자. 이 경우 채권 90억원어치를 사고 10억짜리 콜옵션을 사는 것이다. 이 때 10억짜리 call option이므로 100% 못 주고 45% 주면 되는 것이다. 이건 아주 심플한 케이스이다. 그런데 요즘이야 사람들이 잘 안다. 예를 들어 미국 의료관계되는 주가가 오르면 그거의 몇 %를 주고, 떨어져도 원금은 보장해 준다는 식이다.

그런데 사람들이 시간이 지나니까 이자비를 뽑아야 된다고 생각하기 시작했다. 왜냐하면 사실 이는 이자비용을 대가로 다른 상품에 투자한 격이기 때문이다. 그러다 보니 채권을 좀 더 많이 사야 되고, 콜옵션을 좀 더 적게 사야 되니까 그만큼 가격이 떨어지게 되는 것이다. 따라서 10% 올랐는데 2.7% 만 준다고 하니까 매력을 느끼지 못하는 것이다. (예를 들어서 92 -> 103억이 되면, 8억으로 투자함)

그래서 펀드 회사들은 Regular 옵션이 아닌 좀 더 싼 Barrier 옵션에 거는 것이다. 그 대신 100억 투자하면 103억은 보장해 주는데, 주가가 올라가면 45% 보장해준다는 식이다. 다만 주가가 배리어에 부딪히면 (너무 오르면) 없어진다는 형태의 조건이 있다. 예를 들면 70% 이상 오르면 안 준다는 조건을 걸고 이런 Barrier 옵션을 팔면 된다. 혹은 양쪽에 배리어를 설치할 수도 있다.

그럼 IB는 뭐로 돈을 버느냐? 수수료로 돈을 번다. 그런데 이 수수료라는게 꽤 무섭다. 1000억을 투자했는데 수수료가 1%이다? 그럼 10억을 번다. 그런데 이거 만드는데 솔직히 2명이서 만들면 된다. 따라서 돈은 잘 벌게 된다.

- **배리어 옵션을 hedge하기 [Static Simplicity 논문]**



Exotic option에는 여러 종류가 있다. 이 중에는 변동성 σ 을 사고 파는 것들도 있다.

중요한 것은 knock-in인가, knock-out인가이다. 실제로 이들을 어떻게 hedge하는가에 대한 문제인데, 아래의 3가지 경우에 대해 hedge하는 법을 배우도록 하자.

- **Down-and-In Call option(DIC)의 가격 구하기**

1. **H=K 인 경우**

슬라이드를 보면

| | |
|---|---|
| Spot (S) = | 95 |
| Strike (K) = | 95 |
| Rf (r) = | 5.0% |
| Vol (sigma) = | 30% |
| T = | 0.4 |
| **Barrier (H) =** | 95 |

=BScall(D5,D6,D7,D8,D9)
=BSput(D5,D6,D7,D8,D9)

이렇게 되어 있다. Bscall과 Bsput은 주어진 S, K, r, σ, T 를 가지고 각각 regular call option, regular put option의 가격을 구하는 함수이다. 또한 아래에서 식을 구할 때에는 r=q 임을 가정하였다. 이는 기초 자산이 환율인 경우인데, 이 경우 우리나라의 환율이 r, 미국의 환율이 q가 된다.

-----------------------------------------------------------

**Function BScall(S As Double, K As Double, r As Double, sigma As Double, T As Double) As Double**

Dim d1 As Double

```
d1 = (WorksheetFunction.Ln(S / K) + ((0 + sigma ^ 2) / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))

BScall = S * Exp(-r * T) * WorksheetFunction.NormSDist(d1) - K * Exp(-r * T) * WorksheetFunction.NormSDist(d1 - sigma * Sqr(T))

End Function

------------------------------------------------------------

Function BSput(S As Double, K As Double, r As Double, sigma As Double, T As Double) As Double

Dim d1 As Double

d1 = (WorksheetFunction.Ln(S / K) + ((0 + sigma ^ 2) / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))

BSput = K * Exp(-r * T) * WorksheetFunction.NormSDist(-d1 + sigma * Sqr(T)) - S * Exp(-r * T) * WorksheetFunction.NormSDist(-d1)

End Function

------------------------------------------------------------
```

- Exp(-r * T) : 이건 r=0으로 만드는 효과가 있다.

이제 기초 자산 S를 위아래로 움직여 보자. 그럼 콜옵션의 가격과 풋옵션의 가격이 같아지는 점이 있다. 즉 S=K일 때 서로 같아진다. 그런데 여기에는 trick이 있는 것이, r=0 일 때 성립한다는 것이다.

주어진 논문을 보면, 기초 자산이 환율인 경우를 가정한다. 그 경우 r=0이



라는 것은 무슨 의미인가? 이 경우 BSF이 약간 변하는데, 우리나라의 금리와 미국의 금리가 들어간다. 즉 우리 나라의 금리 = r이고, 미국의 금리가 q이면 r=q 일 때 Put/call의 값이 동일해짐을 이야기한다.

이제 K=H인 상황 하에서 DIC의 가격을 구하는 법을 보도록 하자. 우리는 Hedging을 통해서 DIC의 가격을 뽑아보도록 하겠다. 우선 K=95, H=95, S=100일 때 DIC를 하나 판다. 가장 좋은 상황은 주가가 95 위에서 계속 놀다가 끝나는 것이다. 이 경우에는 종료와 동시에 Nothing이 되므로 Hedge를 할 필요가 없다.

문제는 기초자산이 움직이다가 H=95에 부딪히는 것이다. 그럼 이게 동시에 행사 가격이 95인 콜옵션을 하나 판 것 같이 되어 버린다! 따라서 그 이후의 주가가 어떻게 되느냐에 따라서 돈을 잃을 수도 있고 벌 수도 있다. 그래서 이를 hedge하여야 하는데, 이 전략은 아래와 같다.

| At Start | When S hits H | When S > H |
|---|---|---|
| Long P(K) | Short P(K)<br>Long C(K) | Do nothing |

즉 DIC를 하나 판 상황에서

1) 처음 시작할 때 행사 가격 K인 풋옵션을 하나 산다.
2) 그리고 주가가 떨어져 배리어를 치면, 행사 가격 K인 풋옵션을 다시 팔고 행사 가격 K인 콜옵션을 산다. 이 경우 만기시를 보면 DIC 사간 사람은 행사 가격 K인 콜옵션을 가지고 있고, 나 역시도 행사 가격 K인 콜옵션을 가지고 있으므로 서로 상쇄된다.
3) 또한 주가가 계속 배리어 위에서만 논다면 만기시에 아무것도 안 해도 된다.

실제로 시키는 대로 한 번 해 보자.

K=H=95인 DIC를 하나 팔았다. 얼마 받았는지는 모른다. 그럼 무엇을 해야

하는가? 처음에 행사 가격이 K인 Put option을 하나 산다. 그럼 2가지 상황이 일어날 수 있다.

1) S>H 에서 끝난 경우 : 이 경우 DIC를 사 간 사람에게 아무것도 줄 것이 없다. 그리고 내가 받을 수 있는 돈도 없다. 따라서 그냥 put option의 payoff대로 받으면 된다. 이는 max(K-$S_T$, 0)이다. 물론 손해도 이익도 본 것이 없다.
2) S hits H : 이 경우 DIC가 K=95인 Call Option으로 변해버리므로, 행사 가격이 95인 call option을 하나 사서 hedging 해주면 된다. 그런데 K=95인 콜옵션을 하나 사려고 하면 이놈의 가격이 얼마인지 알아야 하는데, **이미 사 놓은 K=95인 풋옵션의 가격이 K=95인 콜옵션의 가격과 같아지므로 풋옵션을 팔아서 콜 옵션을 사는 것이다.** 이게 왜 성립하는가? S=K=H=95인 상황이기 때문이다. 예를 들어 S=100, K=95일 때 콜옵션, 풋옵션 가격은 아래와 같지만

| | |
|---|---|
| Spot (S) = | 100 |
| Strike (K) = | 95 |
| Rf (r) = | 5.0% |
| Vol (sigma) = | 30% |
| T = | 0.4 |
| **Barrier (H) =** | 95 |

9.9351799 =BScall(D5,D6,D7,D8,D9)
5.0341865 =BSput(D5,D6,D7,D8,D9)

S=K=95인 아래 상황에서 call = put 임을 알 수 있다. 따라서 풋옵션 팔고 콜옵션 사면 된다.



| | |
|---|---|
| Spot (S) = | 95 |
| Strike (K) = | 95 |
| Rf (r) = | 5.0% |
| Vol (sigma) = | 30% |
| T = | 0.4 |
| **Barrier (H) =** | 95 |

7.0379792 =BScall(D5,D6,D7,D8,D9)
7.0379792 =BSput(D5,D6,D7,D8,D9)

말로 설명하자면, S hits H 한 경우 내가 미리 사 놓은 풋옵션 가격이 배리어 치면서 올라가고 콜옵션의 가격이 점점 떨어져지는 것이다. 결국 위의 Hedging 전략을 쓴다고 했을 때, DIC의 가격은 처음에 샀던 풋옵션 하나의 가격과 같다!

따라서 $S_0$=100 이었을 때 DIC 의 가격은 처음 샀던 풋 옵션 가격= 5.034 와 같다. 그리고 배리어에 부딪히면 내가 사 놓은 풋옵션 가격은 비싸져서 7.03이 되므로 이걸 팔고 콜옵션을 사는 것이다. 따라서 상대방도 regular call option, 내 것도 regular call option이므로 서로 똑같이 끝나는 것이다.

**결론 H=K 일 때 DIC(K) = BSPut(K) 이다.**

- **식으로 보는 Barrier option**

위의 내용을 식으로 써 보자. 환율 시장이 아닌 경우에는 r=q이므로, 아래와 같은 식들이 성립한다.

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-qT}N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$C_{di} = S_0 e^{-qT}(\frac{H}{S_0})^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT}(\frac{H}{S_0})^{2\lambda-2} N(y-\sigma\sqrt{T})$$

$$C_{di} = Ke^{-rT}N(y) - S_0 e^{-rT}N(y-\sigma\sqrt{T})$$

그런데 r=q 라고 보면 이렇게 구한 가격이 put option의 가격과 같음을 알 수 있다. 우선 lambda를 없애줘야 하는데, r=q 이니까 아래 식이 성립한다.

$$\lambda = \frac{r-q+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

(r=q이기 때문이다)

$$y = \frac{\ln(H^2/(S_0 K))}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\frac{K}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

(K=H이기 때문이다)

**즉 H=K 인 경우 DIC(H=K) = PUT(K) 이 된다.**

## 2. H<K 인 경우

이걸 위해서는 특이한 관계 하나를 하나 알아야 한다. 이를 Put-call symmetry라고 부른다. C(K)는 P(Y) 몇 개와 가격이 같을까? 즉 행사 가격 K 인 콜옵션은 행사가격 Y인 풋옵션 몇 개와 같을까? 즉 아래 식의 내용이다.

**C(K) = X * P(Y)**

C(K) : 콜 하나

P(Y) : 풋 하나

X : PUT 몇 개



가 성립하는 X는 뭘까? 이게 어떻게 나왔는가는 또 괴로운 과정이니 좀 생략하고, 일단 받아들이기로 하자. 이는 아래와 같다.

| | |
|---|---|
| ☐ What strike price? | Geometric Mean ( Strike of call, Strike of put ) = Spot<br>Y = S^2 / K |
| ☐ How many puts? | The ratio of distances to the respective strikes<br>X = (K-S) / (S-(S^2/K)) = K/S |

- 풋옵션의 행사 가격은

$$Y = \frac{S^2}{K}$$

- 풋옵션의 개수는

$$X = \frac{K-S}{S-\frac{S^2}{K}} = \frac{K}{S}$$

가 된다.

그리고 Hedging 전략은 아래와 같다. 즉 행사 가격이 K이고, 배리어 H의 위치가 H <= K인 DIC를 팔면 아래와 같은 전략을 취해주면 된다.

| At Start | When S Hits H | When S > H |
|---|---|---|
| Long $\frac{K}{H}P(\frac{H^2}{K})$ | Short $\frac{K}{H}P(\frac{H^2}{K})$<br>Long $C(K)$ | Do Nothing |

즉 아래와 같은 방법을 취해주면 된다.

1) 처음 시점 기초자산 가격 S=100 이다.
2) K=90이고 H=80인 DIC를 하나 판다.
3) 동시에 K = 71.11($80_2$/90)인 풋옵션을 9/8 만큼 산다.
4) S > 80 에서 놀 경우, 그냥 아무것도 안 하면 된다.

5) S hits 80 인 경우, 풋옵션을 팔아 K = 90인 콜옵션을 사면 된다.

1. Current spot is 100.

2. Sell DIC with strike 90 and barrier 80.

3. At the same time buy 9/8 puts with strike 71.11 (=80^2/90).

4-1. If S stays above 80, then DIC and puts expire worthless.

4-2. If S hits 80, then we sell puts and buy one call with strike 90.

이런 식으로 Trade를 하는 것이다. 여기에는 규모의 경제라고 하는 것이 존재하는데, 이런 식의 상품이 굉장히 많이 팔리고 hedge가 한 사람에게 모두 몰린다고 하면 매수 포지션 및 매입 포지션도 많이 들어온다. 즉 이걸 사야 하는 포지션도 있고 팔아야 하는 포지션도 있을 것이다. 이런 경우에는 hedge가 필요없이 가지고 있기만 해도 된다. 즉 포지션이 크면 클 수록 좋다. 이 때는 어느정도 나가고 들어오는게 큰 영향이 없다. 다만 포지션이 좀 작으면 복제를 해 내야 하므로 좀 피곤하다.

아래와 같이 실제로 계산을 해보도록 하자.

1) **아래와 같이 DIC의 조건이 주어졌다고 하자.**
   S = 100
   K = 90
   r = 11.5%
   σ = 30%
   T = 1
2) **K=90이고 H=80인 DIC를 하나 판다.(이 가격은 아래 풋옵션 가격과 같다!) 동시에 K = 71.11($80_2$/90)인 풋옵션을 9/8 만큼 산다.**

   이 풋옵션의 가격을 계산해 보면,
   $$\frac{K}{H}BSput(S,K,r,\sigma,T)=\frac{9}{8}BSput(100,71,11.5\%,30\%,1)=1.6070465$$
   이 된다.



3) **S > 80 에서 놀 경우, 그냥 아무것도 안 하면 된다.**
4) **S hits 80 인 경우, 풋옵션을 팔아 K = 90인 콜옵션을 사면 된다.**

   위에서 구한 풋옵션(K=71.11) 9/8개의 값을 해당 시점에서 구해 보면,
   $$\frac{K}{H}BSput(S',K,r,\sigma,T)=\frac{9}{8}BSput(80,71,11.5\%,30\%,1)=5.258503587$$
   그런데 이것은 해당 시점 K=90의 콜옵션 1개 가격과 같다.
   $$BScall(S,K,r,\sigma,T)=BScall(80,90,11.5\%,30\%,1)=5.258503587$$

따라서 위와 같이 하면 Hedging 이 되었음을 알 수 있다. 결국 H <= K 인 경우의 DIC 가격은

**H≤K 인 경우 DIC(H≤K) = K/H PUT($H_2$/K) 이 된다.**

○ **UIC Hedging 전략**

DIC랑 거의 비슷하다.

(1) H=K인 경우

| At Start | When S Hits H (S>=H) | When S < H |
|---|---|---|
| Long $P(K)$ | Short $P(K)$<br>Long $C(K)$ | Do Nothing |

(2) H >= K 인 경우

| At Start | When S Hits H (S>=H) | When S < H |
|---|---|---|
| Long $\frac{K}{H}P(\frac{H^2}{K})$ | Short $\frac{K}{H}P(\frac{H^2}{K})$<br>Long $C(K)$ | Do Nothing |

## ○ DOC Hedging 전략

요건 주가가 배리어에 부딪히기 전까지는 Regular Call 이었다가, 배리어에 부딪히는 순간 사라지는 것이다.

(1) H=K인 경우

| At Start | When S Hits H (S<=H) | When S > H |
|---|---|---|
| Long $C(K)$<br>Short $P(K)$ | Short $C(K)$<br>Long $P(K)$ | Do Nothing |

(2) H <= K 인 경우

| At Start | When S Hits H (S<=H) | When S > H |
|---|---|---|
| Long $C(K)$<br>Short $\frac{K}{H}P(\frac{H^2}{K})$ | Short $C(K)$<br>Long $\frac{K}{H}P(\frac{H^2}{K})$ | Do Nothing |

## ○ UOC Hedging 전략

(1) H=K 인 경우

| At Start | When S Hits H (S>=H) | When S < H |
|---|---|---|
| Short $P(K)$<br>Long $C(K)$ | Long $P(K)$<br>Short $C(K)$ | Do Nothing |

## ○ DIP Hedging 전략



(1) H=K 인 경우

| At Start | When S Hits H (S<=H) | When S > H |
|---|---|---|
| Long $C(K)$ | Long P(K)<br>Short $C(K)$ | Do Nothing |

## ○ UIP Hedging 전략

(1) H=K 인 경우

| At Start | When S Hits H (S>=H) | When S < H |
|---|---|---|
| Long $C(K)$<br>Short $P(K)$ | Short $C(K)$<br>Long $P(K)$ | Do Nothing |

## ○ DOP Hedging

| At Start | When S Hits H (S<=H) | When S > H |
|---|---|---|
| Long P(K)<br>Short $C(K)$ | Short P(K)<br>Long C(K) | Do Nothing |

## ○ UOP Hedging

| At Start | When S Hits H (S>=H) | When S < H |
|---|---|---|
| Short C(K)<br>Long P(K) | Long C(K)<br>Short P(K) | Do Nothing |

# 금융공학13 - Forward, Swap, Zero Rate

2007년 5월 22일 화요일
오후 1:01

- **Forward and Futures [책 Chapter 5]**

선도 가격은 어떻게 결정되는가? Arbitrageur 가 존재하지 않는 범위 내에서 결정된다. **이에 대한 설명은 책 102 page에 있다.** 즉 아비트리지가 존재하지 않게 하는 가격이어야 한다.

Spot price : $300
Funding cost : 5%
이의 1년 뒤 선도 가격은?

| Today Action | Cashflow |
|---|---|
| Funding | 300 |
| Buy asset | -300 |
| Short at 340 | 0 |
| Total | 0 |

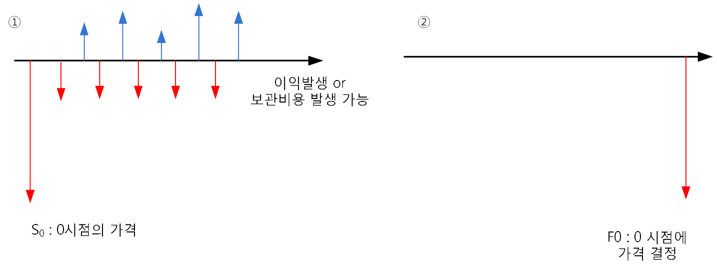
| Maturity Action | Cashflow |
|---|---|
| Repay | -315 |
| Sell | 340 |
| Total | 25 |

즉 위의 예제는 Arbitrageur 가 이익을 가져간 예이다. 즉 만기 시점을 보면 선도 가격 340이 합리적이지 않음을 알 수 있다. 그러면 어떻게 해야 Forward Price를 계산할 수 있을까?

Suppose that you want to be long some asset in 3 months.



1) You could buy the asset today and wait for 3 months.
2) You could buy the 3 month forward today.




위의 ① 과 ② 를 둘 다 현재가치화 했을 때 그 가치가 동일해야 한다.

① Spot + PV (cost - benefit)
② PV ($F_0$)

이때 ① = ② 이다. 이를 이용하여 $F_0$를 결정해야 한다.

자, 이제 이를 이용하여 위의 사례를 다시 계산해 보도록 하자.

- **Simple Case (without cashflow) [교과서 102 page 참고]**

- Stock (배당 없고 구매로 인한 비용 없음) : 30
- Rf (2 year) : 5% (연간 5%)

**Today**

| Today | Cashflow |
|---|---|
| Funding | 30 |
| Buy stock | -30 |
| Short at 35 | 0 |
| Total | 0 |

**Maturity**

| Action | Cashflow |
|---|---|
| Repay | -33.15513 |
| Sell | 35 |

그리고 1.84487.. 이건 Riskless benefit이 된다.

또한 Arbitrageur 가 없는 가격은 33.155... 가 된다.

따라서 선도 계약의 식은

$$S_0 = F_0 e^{-rT}$$
$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

이 때 $F_0$은 Forward Price, $S_0$은 현 시점의 선도 계약 가격이다.

- **Forward의 Arbitrageur**

만약 $F_0 > S_0e^{rT}$ 라면, 기초자산을 하나 사고 해당 자산에 대한 선도 계약을 팔면 된다. $F_0 < S_0e^{rT}$ 라면, 기초자산을 하나 팔고 이거에 대한 선도 계약을 하나 사면 된다. 그럼 Arbitrageur를 할 수 있다.

- **Known Income [교과서 page 104-106]**

즉 앞으로 발생할 수익이 미리 알려질 경우의 선도 계약식이 어떻게 달라지는지 한 번 살펴보도록 하자. 여기에서는 채권 사례를 다루도록 한다.

우선, 쿠폰 지급 채권을 구매하는 선도 계약이 있다고 하자. 이의 가격은 $900이다. 만기는 9개월, 그리고 4개월 후에 $40씩 쿠폰을 준다고 하자. 또



한 4개월 무위험 이자율은 3%, 9개월 무위험 이자율은 4%라고 한다 (Annum임)

그런데 아래와 같이 Arbitrageur 가 발생하는 사례를 연구해 보고자 한다. 우선 선도 가격이 상대적으로 높은 $910이라고 하자. 이 경우 arbitrageur는 $900을 빌려서 해당 채권을 산 다음에 선도계약으로 팔아버릴 것이다. 쿠폰 지급은

$$40e^{-0.03\times4/12} = \$39.60$$

의 PV를 가지고 있다. 따라서 $900 중에서 $39.60은 4개월동안 3%의 이율로 미리 받아두고 쿠폰 지급을 통해 갚아나간다. 남은 $860.40은 9개월동안 4%의 이율을 가지게 된다. 따라서 9개월 후에 갚아야 하는 돈은

$$860.40e^{0.04\times0.75} = \$886.60$$

가 된다. 또한 $910은 선도 계약으로서 받게 된다. 따라서 910을 받아서 위와 같이 투자하면 최종적으로

$$910.0 - 886.60 = \$23.40$$

을 벌게 된다.

또한 상대적으로 선도 계약금이 낮은 금액, 즉 $870에 결정되었다고 하자. 이 경우 투자자는 채권을 팔아서 선도 계약을 사게 된다. 선도 계약을 팔아서 실현되는 금액 $900 중 $39.40은 3%짜리 4개월 대출상품에 투자되어 이거 이자로 채권의 쿠폰을 갚는데 쓰면 된다. 남은 $860.40은 9개월짜리 4% 대출상품에 투자하여 $886.60이 된다. 따라서 선도 계약으로 줘야 할 돈 $870을 주고 나면

$$886.60 - 870 = \$16.60$$

이 된다.

- **예제 문제 (근데 무슨 소린지 잘 모르겠음)**

  자, 아래와 같이 6개월마다 40 지급받는 5년짜리 채권을 보자.
  이 때 $S_0$ = 900, 6개월 이자율 : 9%, 1년 이자율 : 10% 라고 한다. 그러면,

  **Today**

| Action | Cashflow |
|---|---|
| Funding(빌려오기) | 900 |
| Buy bond(채권사기) | -900 |
| Short at 930(선도계약 팔기) | 0 |
| Total | 0 |

**6 month**

| Action | Cashflow |
|---|---|
| Repay(갚기) | -40 |
| Coupon(쿠폰) | 40 |
| Total | 0 |

**Maturity**

| Action | Cashflow |
|---|---|
| Repay(원금상환) | -994.6538<br>-952.3922 |
| Coupon(쿠폰) | 40 |
| Sell(팔기) | 930 |
| | 17.6047<br>-24.65383 |

선도 이자율 모르는 상태에서 1년 뒤 이익은 얼마인가? 6개월 뒤 6개월 이자율..

한 번 만기를 달리하여 Funding 해 보자. 그러면,

40 * exp ( 9%, 1/2 ) = 38.239 ...
861.76 * exp( 10%, 1) = -952.3922...

따라서 Today funding 시 6개월짜리는 38.24( 6개월 후 coupon 지급



되는 40으로 repay 할 경우), 1년짜리는 861.76이 된다.

$$900 - (40e^{-9\% \times 0.5} + 40e^{-10\% \times 1})$$

**(책의 사례는 106page 참고할 것)**

여하튼 위의 사례를 종합하여 보면, I만큼의 현재가치를 가져다 줄 것으로 생각되는 선도계약의 Forward Price는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT}$$

첫번째 사례의 값들을 대입해 보자. 즉 $S_0$ = 900, I = 39.60, r=0.04, T=0.75 를 대입해 보면,

$$F_0 = (900.00 - 39.60)e^{0.04 \times 0.75} = \$886.60$$

이 나옴을 알 수 있다!

- **Known Yield - Continuous Dividend : 107 page 참조할 것.**

이 사례가 나올 것 같지는 않음.

- **Forward and Futures contracts on Currencies**

아래와 같이 변수들을 정의한다.

$S_0$ : The current spot price in dollars of one unit of the foreign currency (예를 들어 $x = 1 won)
$F_0$ : Forward price in dollars of one unit of the foreign currency.
$r_f$ : 외환 사용하는 국가의 무위험 이자율

r : 자국(미국)의 무위험 위자율
투자 기간 : T

그럼 아래와 같은 식이 성립한다.

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

자 아래와 같은 예제를 풀어보도록 하자.

2-year interest rate in Korea : 5%
2-year interest rate in US : 7%
Spot exchange rate between won and dollar is 0.6200 US per WON.

이 경우 2-year의 Forward exchange rate은,

$$0.62e^{(0.07-0.05)\times 2} = 0.6453$$

이다. 그런데 2-year의 forward exchange rate이 이것보다 작은, 예를 들어서 0.6300 이었다고 해 보자. 이 경우 Arbitrageur는 아래와 같이 할 수 있다.

1) 1,000 Won을 5% 이율로 2년간 빌린다. 이를 620 US로 환전하고 미국 시장에 7%를 받고 투자한다.
2) 692.26 US를 줘서(=1,105.17x0.63), 1,105.17 Won을 받는 선도 계약에 들어간다.

620 USD는 7% 성장율로 2년동안

$$620e^{0.07\times 2} = 713.17$$

을 만들 수 있게 된다. 물론 이 중에 696.26 USD는 선도 계약의 대가로 주고 대신 1,105.17 Won을 받으면 된다. 이 금액은 1000Won을 한국 시장에서만 대출해 줬을 경우 2년 후 받는 금액과 정확히 같다.(1,000$e^{0.05x2}$ = 1,105.17)



따라서 이 전략은 무위험 수익 713.17 - 696.26=16.91 USD를 얻게 만든다.

**(반대의 경우도 마찬가지. 114page 참조)**

- **아래는 교수님 예제인데 무슨 소리인지 잘 모르겠음..**

The 90-day interest rate in Korea is 5%
The 90-day interest rate in U.S. is 3%

Suppose that a Korea company want $100 man in 90 days. $1=1200 won

Today

| Action | Cashflow |
|---|---|
| Funding | 1191.034 |
| Buy dollars | -1191.034<br>-1 * exp(-3%*0.25)*1200 |
| Short at 1300 | 0 |
| Total | 0 |

Maturity

| Action | Cashflow |
|---|---|
| Repay | -1206.015<br>(=1200*exp(2%*0.025) ) |
| Sell | 1300 |
| Total | 93.484945.. |

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_p)T}$$

- **Forward Contract**

  식은 아래와 같다.
  $f = (F_0 - K)e^{-rT}$

- **선물계약과 선도계약의 차이점 (page 109-110)**

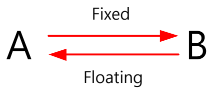
  만약 rf 이자율이 일정하고 모든 만기상품에 대하여 같다면, forward price 과 future price는 일치하게 된다.

  하지만 실제 세계에서와 같이 이자율이 일정하지 않는다면, 선물계약과 선도 계약의 가격은 더 이상 일치할 수 없다. 예를 들어 보자. S라는 기초 자산은 이자율과의 상관 관계가 높다고 하여 보자. 만약 S가 증가하면 future position에 있는 투자자는 그 즉각 수익을 얻게 될 것이다. 반면 forward position에 있는 투자자는 그다지 영향을 받지 않게 된다. 따라서 S가 이자율에 대한 상관관계가 높을수록 future price의 가격은 forward price에 비해서 더 높게 된다.

  이거 말고도 다를 수 있는 요인은 많다. 세금, 거래 비용, 마진 등등이 있다. 대개 future contract가 더 유동적이다.

- **Swap [Chapter 7]**

  쉽게 나타내면 아래와 같다.




  Libor : 은행과 은행 사이의 변동 금리
  Notional principal : 명목 원금 (이 돈 자체는 교환되지 않고, 이자만이 교환

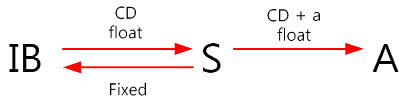


된다)

  - **Business day convention**

    미래 금리를 스왑하는 것인데, 주로 hedge를 목적으로 쓰인다.

  - **FRN (Floating Rate Note) 변동 금리부 채권**




  - **Dad(?) Floating Rate Note**

    (국고채 3년 - CD) + a

- **Swap 실습**

  **A는 B에게 fixed rate 5%를 지불하고, B는 A에게 LIBOR를 지불한다고 하자.** 이 경우 테이블은 아래와 같다. 6개월마다 한번이므로 1/2 해줌에 유의한다.

| A 입장 | | 받는변동금리 | 지불고정금리 | |
|---|---|---|---|---|
| Date | LIBOR | Rec Fl | Pay Fix | Net |
| 2003-03-05 | 4.20% | | | |
| 2003-09-05 | 4.80% | 2.1 | -2.5 | -0.4 |
| 2004-03-05 | 5.30% | 2.4 | -2.5 | -0.1 |
| 2004-09-05 | 5.50% | 2.65 | -2.5 | 0.15 |
| 2005-03-05 | 5.60% | 2.75 | -2.5 | 0.25 |
| 2005-09-05 | 5.90% | 2.8 | -2.5 | 0.3 |
| 2006-03-05 | 6.40% | 102.95 | -102.5 | 0.45 |

  마지막에 100씩 더 들어온 이유는 명목 원금 때문이다. 여하튼 전체적으로는 0.45 이득 본 것을 알 수 있다.

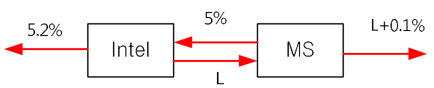
B 입장에서도 한 번 생각해 보자. 그러면,

| B 입장 | | 받는고정금리 | 지불변동금리 | |
|---|---|---|---|---|
| Date | LIBOR | Rec Fix | Pay Fl | Net |
| 2003-03-05 | 4.20% | | | |
| 2003-09-05 | 4.80% | 2.5 | -2.1 | 0.4 |
| 2004-03-05 | 5.30% | 2.5 | -2.4 | 0.1 |
| 2004-09-05 | 5.50% | 2.5 | -2.65 | -0.15 |
| 2005-03-05 | 5.60% | 2.5 | -2.75 | -0.25 |
| 2005-09-05 | 5.90% | 2.5 | -2.8 | -0.3 |
| 2006-03-05 | 6.40% | 2.5 | -2.95 | -0.45 |

이런 식으로 죽 진행이 되어서 마지막까지 payment가 일어난다. 그런데 swap이 시작되는 날인 2003년 3월에는 미래에 금리가 어떻게 변할지 사실 아무도 모른다. 그래서 여기에 적어 둔 금리들은 여러가지 가능한 것 중에 하나의 금리일 뿐이다.

나는 고정 금리를 지급하고, 그에 상응하는 변동 금리를 받는데, 따라서 이렇게 Libor 금리가 상승하면 A는 좋다. 즉 금리가 상승할거라고 예측하면 나는 고정금리를 줄 테니까 변동금리를 다오, 그럴 수 있는 것이다.

실제 상황은 뭐냐, A라는 사람이 있다고 하자. 이 사람은 speculator가 아니었다. 이 때 Swap은 변동금리 대출을 고정금리 대출로 바꿀 수 있는 효과가 있다. A라는 사람이 제조업을 하는데, 새로운 공장을 지으려면 돈이 필요하다. 이 돈을 받으려고 은행에 갔더니 변동 금리 대출밖에 안 해준다고 했다고 하자. 그런데 제조업자이기 때문에 이자비용이 고정되어 있는 것이 사실 편하다. 그래서 이건 생각하지 않고 연 몇%로 돈을 빌려줬으면 좋겠는데, 은행에서는 변동으로 빌려주는 것이다. 이 때 swap을 써먹는 것이다.




위와 같이 스왑이 발생한다고 하자.

그럼 MS의 경우



외부에 L+0.1%를 지급(-)하고, L을 받고(+), 5%를 준다(-)
따라서 이걸 계산하면 -L-0.1+L-5 = -5.1%가 된다. 즉 전체적으로는 5.1%를 외부에 주는 효과가 나오는 것이다.

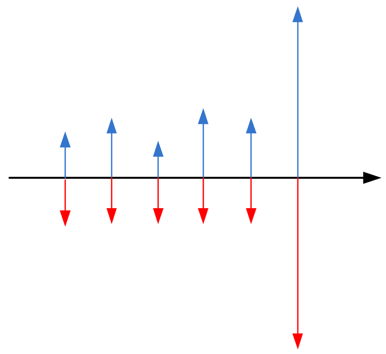
반면 Intel의 경우
외부에 5.2%를 지급(-)하고, L을 주고(-), 5%를 받는(+)다. 따라서 이걸 몽땅 합치면 -5.2-L+5 = -L-0.2 가 된다. 즉 전체적으로는 L+0.2를 외부에 주는 효과가 나오게 된다.

FRN을 가지고 있으면 항상 변동 금리로 수입이 생긴다. 그런데 이걸 고정금리로 하면 straight bond를 가지고 있는 것처럼 되는 것이다.

- **Swap의 Long과 Short**

Swap도 long과 short이 있다. 누가 long이고 누가 short 인가?

한 번 이걸 선도계약이라고 생각해 보자. 미래의 특정시점이 되면 그 물건의 가격이 얼마가 되든지 상관없는 것을 long이라고 한다. 이를 Swap에 적용시켜서보면, Swap에서는 여러 번의 cashflow가 발생하지만, 위쪽과 아래쪽을 죽 잘라서 보는 것이다.



그래서 swap을 여러 개의 만기가 다른 선도계약의 합이라고 볼 수도 있다.

즉 고정금리를 받고 변동금리를 주는 경우, 이는 선도계약에서의 forward price에 해당하는 숫자가 된다. 그래서 이건 Short이다. 즉 기초자산이 "변동금리"인 것이다. 그 변동금리가 얼마가 되느냐에 상관없이 일정금을 받고 건네주기로 했으면 short position이다. 즉 고정금리=가격이라고 생각하면 된다.

**즉 A -> B에게 fixed를 지불, B->A에게 floating 을 지불** 하는 상황에서, A는 long position, B는 short position 이라고 생각하면 된다.

그런데 swap dealer들은 이 표현을 잘 안 쓴다. 누가 long이고 누가 short인지 헷갈리니까 그렇다. 그래서 그냥 "고정금리를 줄 테니 변동금리를 달라"라고 말한다.

또한 Swap의 가격이 무엇인지를 알 수 있다. 즉 고정금리가 swap의 가격이다. 이것을 swap rate라고 한다. 즉 미래의 변동금리에 대한 가격으로 고정금리의 가격을 매일매일 변화시킨다. 그렇다면 그 가격이 어떻게 결정이 되는가? Hull 책을 보면, 비교 우위라는 내용이 있는데, 그 관계에 의해서 결정된다는 주장이 있다.

- **Competitive advantage에 의한 swap rate의 결정**

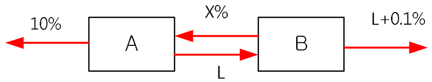
A라는 사람이 있고 B라는 사람이 있다. 두 사람이 각각 은행에 갔다. 아까 은행에서는 변동금리밖에 대출 안 해준다고 했는데, 고정금리도 대출 가능한 은행이라고 해 보자. 이 경우 신용평가를 볼 것이다. 그 신용도에 따라서 돈을 빌려줄 텐데, A의 경우에는 연 10%를 낸다. 변동금리로 하고 싶다면 리보+3bp가 될 것이다. 그리고 B가 갔다. 은행이 B에 대해서 조사를 해 봤더니 B가 고정금리로 돈을 빌리고 싶다면 11.2%로 빌리고, 변동 금리로 빌리려면 1bp가 될 거라고 했다. 이 경우 A의 신용도가 더 좋은 것이다. 고정금리도 그렇고, 변동금리에서도 그렇다. 그래서 A는 B에 대해 절대 우위에 있는 것이다.



| | Fixed | Floating (LIBOR+) |
|---|---|---|
| A | 10.00% | 0.30% |
| B | 11.20% | 1.00% |
| Δ(B-A) | 1.20% | ✓0.70% |

그런데 이 비교우위를 고려하였을 때, B 입장에서는 각각의 다른 시장에서 얼마만큼을 더 지불해야 하는가? 고정금리 시장에서는 1.2%만 더 지불하면 되고 변동 금리에서는 0.7%만 더 지불하면 된다. **따라서 변동금리 시장에서 돈을 빌리는 것이 비교 우위이다.**

즉 이 비교 우위에 따라서 돈을 빌리면 문제가 없는데, B는 고정 금리로 돈을 빌리고 싶고, A는 변동 금리로 돈을 빌리고 싶다고 하자. 경우 비교 우위는 다른쪽 시장에 있는 것이다. 이 때 Swap을 쓰는 것이다. 즉 A는 고정 금리로 은행가서 돈을 빌리고 B는 변동 금리로 돈을 빌린다. 그리고 Swap하는 것이다. 그렇다면 이 swap rate를 얼마로 정하는 것이 유리하겠는가? 여기에서는 아래와 같이 된다.




이 때 Swap이 얼마일 때 A도 유리하고 B도 유리한가? 이를 구하기 위해서 A의 패널티가 무엇인가를 보자. 변동에서 빌리고 싶었는데 고정을 빌렸고, 그래서 연간 10%를 지불한다. 따라서 고정금리를 받고 변동 금리를 지불하는 swap을 하는 것이다. 즉 내가 받은 고정 금리를 넘기고 나는 변동 금리를 지불하도록 하는 것이다.

이를 cashflow 관점에서 써 보자. 그러면 A입장에서는,

-10% + x% - L <A입장에서 나가는 돈>

-(L+1%) + L - x% = -(x%+1%) <B 입장에서 나가는 돈>

이 된다. 그런데 A, B 모두 이렇게 나가기로 한 돈과 원래 비교 우위 사이의 차액이 서로 같아야 한다. 따라서

A의 비교우위는 변동환율로 원래 L + 0.3% 이고,
B의 비교우위는 고정환율로 원래 11.2 % 이다.

이걸 각각에서 빼 준 다음에 이 차이가 같도록 하면 된다 그러면,

A의 차 : -10% + x% - L + (L+0.3%)
B의 차 : -(x%+1%) + 11.2%

이 둘이 같아야 하므로 열심히 풀어서 구하면 **x = 9.95%**가 나온다. 이것이 swap rate이다.

| | Fixed | Floating (LIBOR+) |
|---|---|---|
| A | 10.00% | 0.30% |
| B | 11.20% | 1.00% |
| Δ(B-A) | 1.20% | ✓ 0.70% |

| | |
|---|---|
| Swap rate | 9.95% |

| A : 고정 금리 대출 | | |
|---|---|---|
| 1. Interest | | -10% |
| 2. Rec fixed | | 9.95% |
| 3. Pay fl | -LIBOR | |
| **합계** | **-LIBOR** | **-0.05%** |
| Benefits | | **0.25%** |

| B : 변동 금리 대출 | | |
|---|---|---|
| 1. Interest | -LIBOR | -1.00% |
| 2. Rec FI | LIBOR | |
| 3. Pay Fix | | -9.95% |
| | | **-10.95%** |
| | | **0.25%** |

자, 이 경우 은행, A, B중에서 누가 가장 손해를 보았는가? 바로 은행이다. 은행은 일종의 arbitrageur를 당한 것이다. 은행에서 자기가 원하는대로 했으면 은행은 아무소리 안할 것이다. 그런데 비교우위가 있는 쪽에서 돈을 빌리고 서로 swap을 했기 때문에 은행은 그 금액만큼 손해를 본 것이다.

그 다음으로 손해를 본 사람은 누구인가? 그게 A이다. 이는 A가 B보다 신용 등급이 좋은데 이익을 똑같이 나눠먹었기 때문이다. 따라서 A가 좀 더 많이 받고 B가 덜 받는 모습이 되어야 한다.



**[문제] 예전에는 이 둘이 같아지는 비율의 swap rate를 구하는 것이 문제였는데, 앞으로는 Benefit이 3:2로 나눠지는 비율을 구하라는 문제를 낼 수도 있다.**

이 경우 아래와 같이 구한다.

A의 효용 : -10% + x% - L + (L+0.3%) = x% - 9.7%
B의 효용 : -(x%+1%) + 11.2% = -x% + 10.2%

A의 효용과 B의 효용 비율이 3:2가 되어야 하므로,

(x - 9.7) : (-x+10.2) = 3 : 2

이 경우 **swap rate = 10%** 가 된다.

그런데 실제로는 이렇게 안 나온다. 아래와 같은 형태이다.

| | | | Average |
|---|---|---|---|
| 1 yr | 4.60% | 4.54% | 4.57% |
| 2 yr | 5.16% | 5.10% | 5.13% |
| 3 yr | 5.53% | 5.50% | 5.52% |
| 4 yr | 6.00% | 5.92% | 5.96% |
| 5 yr | 6.35% | 6.27% | 6.31% |
| 7 yr | 6.72% | 6.62% | 6.67% |
| 10 yr | 7.16% | 7.06% | 7.11% |

즉 만기 1년짜리 swap을 하면 고정금리를 지불할 경우 4.54% 지급하고, 고정금리를 받는다면 4.60%를 받는다는 것이다. (산업 은행 입장에서는 유리한 쪽으로 할 것이다)

이 경우 6bp 차이가 나고, 10년짜리의 경우 10bp 차이가 난다.

Swap은 채권과 연관이 되어 있다. 실제로 우리 회사에서 자주 발행되지는

않는다. 그런데 미국에서는 30년짜리도 있다. 그건 미국 정부가 만기 30년짜리 채권 발행하는데 그걸 근거로 한다.

- **Zero rate**

이는 Zero-coupon bond 의 가격을 결정하는데 쓰이는 금리이다. (뭐 일종의 무위험 이자율인가..?)

우리가 아는 채권은 보통 쿠폰을 준다. 그런데 zero-coupon은 쿠폰을 안 준다는 의미이다. 중간에 cashflow가 아무것도 없다. 이를 우리나라에서는 "할인채"라고 부른다. 왜 할인채라고 부르나? 지금으로부터 1년 지나면 100을 주겠다고 했을 때, 이 100보다는 가격이 좀 쌀 것이다. 이렇게 할인해서 파는 것처럼 보이기 때문에 할인채이다. 즉 중간에 쿠폰이 없는 채권이라고 보면 된다.

그런데 이걸 우리나라 어디에서도 공식적으로 공표하는 곳은 없다. 다만 Swap rate를 이용해서 Zero-rate를 구하는 방법이 있다.

우리나라 swap은 3개월마다 한 번씩 쿠폰을 지급한다. 그래서 평균 4.57%로 계약을 맺었다고 했을 때, 맨 끝에 나도 100%를 더 줄 테니, 너도 100%를 더 다오 이래도 큰 문제가 없다는 것이다.

- **FRN**

이 상품의 가격은 100이다. 즉 100만원 모아서 CD를 산다. 그리고 오늘 CD를 사면 오늘 CD 금리에 해당하는 적용을 받고, 3개월 후 만기가 돌아온다. 따라서 100+CD가 된다. 이 CD는 돌려주면 된다. 그리고 금리가 올랐다? 금리가 오른 상태에서 100주고 사면 또 100+CD가 될 것이다. 다시 이 CD를 돌려준다. 이걸 계속 반복하면 된다.

따라서 FRN은 만기에 관계없이 현재 시점의 가격은 원금이 된다. 그 이야



기는 무엇인가? 미래에 발생할 가격을 모조리 현재 가격으로 discount 했다는 의미이다.

즉 변동 쪽은 계산하나 마나 현재 시점에서 보면 항상 100이다. 따라서 고정 금리쪽을 잘 정해줘서 그 각각의 합이 100이 되게 만들면 zero rate에 해당하는 숫자를 찾을 수 있다.

자, 아래와 같이 가정을 하자. 왼쪽은 고정 금리 쪽의 cashflow이다. Swap Rate는 5.13%이고, 이걸 분기별로 나눠서 지급한다.

| | Cashflow |
|---|---|
| 2002-01-29 | 0 |
| 2002-04-29 | 1.1425 |
| 2002-07-29 | 1.1425 |
| 2002-10-29 | 1.1425 |
| 2003-01-29 | 101.1425 |

현재 시점에서의 discount factor는 1이다. 그런데 지금으로부터 3개월 후에 1.1425라는 돈이 들어왔다? 그럼 이의 discount factor는 얼마가 되는가? 현재로서는 모르지만, 만약 discount factor가 시간에 따라서 linear하다면, 아래와 같이 된다.

이렇게 해서 discount factor를 구할 수 있다. 이는 제일 처음과 아래 쪽이 linear하게 만들어 주는 숫자들이다. 즉 보간법이다.

| | Cashflow | PVIF | PV | Zero Rate |
|---|---|---|---|---|
| 2002-01-29 | 0 | 1 | 0 | |
| 2002-04-29 | 1.1425 | 0.9888923 | 1.1298094 | 4.47% |
| 2002-07-29 | 1.1425 | 0.9777845 | 1.1171188 | 4.49% |
| 2002-10-29 | 1.1425 | 0.9666768 | 1.1044282 | 4.52% |
| 2003-01-29 | 101.1425 | 0.9555691 | 96.648644 | 4.54% |
| | | | 100 | |
| | | 0.95557 | | |

이건 목표값 찾기로 구한 값이다. 이것이 바로 1년간의 할인율이자 rf가 된다.

나머지는 그냥 선형 보간 시켜서 구해준다.

이건 모든 cashflow의 합이다.

=-LN(PVIF)/(t/T)
즉 첫번째 기간은 t/T=0.25, ...

빨간 색으로 되어 있는 부분을 바꾸어 주어서 초록색 부분이 100이 되면

된다. 이를 목표값 찾기로 구한 결과가 위와 같이 된다.

(그런데 그냥 채권 구하는 공식으로 구하면 안되나? 참고로 채권 공식은 아래와 같음.)

$$\text{Bond Value} = C\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^t}}{r}\right] + \frac{F}{(1+r)^t}$$

여하튼 swap rate로부터 implied 된 zero-rate가 바로 오른쪽에 있는 노란색 항들이다. 물론 discount factor가 특정 함수의 형태를 가져서 이에 대한 것을 식으로 넣어 준다면 오른쪽도 변할 것이다.

이제 1년은 이렇게 구했다. 2년짜리는 어떻게 구하나? 5.13%라는 swap rate가 의미하는 바가 무엇인가? 즉 왼쪽은 8번 발생한 고정금리의 payment이다. 그리고 마지막에는 원금을 돌려준 것처럼 적어 두었다. 그리고 오른쪽은 CD금리이다. 이를 계산하지 않고 보면 가격은 항상 100이다. 그럼 어떤 discount factor들을 곱해서 나온 것이 100이 되어야 하는가?

이 때 앞의 4개는 1년짜리 swap을 가지고 벌써 구해 두었으므로 주황색 4개는 변하지 않아도 된다. 그냥 복사해 온다! 그리고 나머지 4개 Term의 PVIF를 linear 한 것으로 계산한다. 또한 맨 마지막 DF를 바꿔도 앞의 주황색 쪽은 변하지 않음에 유의한다.

| | Cashflow | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2002-01-29 | 0 | 1 | 0 | |
| 2002-04-29 | 1.2825 | 0.9888923 | 1.2682543 | 4.47% |
| 2002-07-29 | 1.2825 | 0.9777845 | 1.2540087 | 4.49% |
| 2002-10-29 | 1.2825 | 0.9666768 | 1.239763 | 4.52% |
| 2003-01-29 | 1.2825 | 0.9555691 | 1.2255173 | 4.54% |
| 2003-04-29 | 1.2825 | 0.9423768 | 1.2085982 | 4.75% |
| 2003-07-29 | 1.2825 | 0.9291845 | 1.1916792 | 4.90% |
| 2003-10-29 | 1.2825 | 0.9159923 | 1.1747601 | 5.01% |
| 2004-01-29 | 101.2825 | 0.9028 | 91.437841 | 5.11% |
| | | | 100.00042 | |
| | | 0.9028 | | |

돌려보자.



| | Cashflow | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2002-01-29 | 0 | 1 | 0 | |
| 2002-04-29 | 1.2825 | 0.9888923 | 1.2682543 | 4.47% |
| 2002-07-29 | 1.2825 | 0.9777845 | 1.2540087 | 4.49% |
| 2002-10-29 | 1.2825 | 0.9666768 | 1.239763 | 4.52% |
| 2003-01-29 | 1.2825 | 0.9555691 | 1.2255173 | 4.54% |
| 2003-04-29 | 1.2825 | 0.8416768 | 1.0794505 | 13.79% |
| 2003-07-29 | 1.2825 | 0.7277845 | 0.9333837 | 21.18% |
| 2003-10-29 | 1.2825 | 0.6138923 | 0.7873168 | 27.88% |
| 2004-01-29 | 101.2825 | 0.5 | 50.64125 | 34.66% |
| | | | 58.428944 | |
| | | 0.9028 | | |

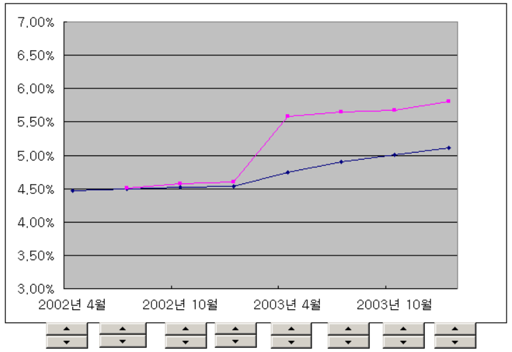
이제 100이 되도록 목표값 찾으면

| | Cashflow | PVIF | PV | Zero Rate |
|---|---|---|---|---|
| 2002-01-29 | 0 | 1 | 0 | |
| 2002-04-29 | 1.2825 | 0.9888923 | 1.2682543 | 4.47% |
| 2002-07-29 | 1.2825 | 0.9777845 | 1.2540087 | 4.49% |
| 2002-10-29 | 1.2825 | 0.9666768 | 1.239763 | 4.52% |
| 2003-01-29 | 1.2825 | 0.9555691 | 1.2255173 | 4.54% |
| 2003-04-29 | 1.2825 | 0.9423758 | 1.2085969 | 4.75% |
| 2003-07-29 | 1.2825 | 0.9291825 | 1.1916765 | 4.90% |
| 2003-10-29 | 1.2825 | 0.9159892 | 1.1747561 | 5.01% |
| 2004-01-29 | 101.2825 | 0.9027959 | 91.437427 | 5.11% |
| | | | 100 | |
| | | 0.9028 | | |

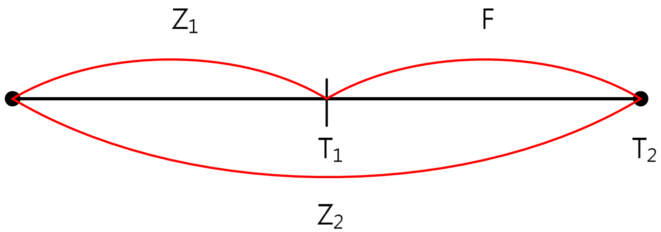
이렇게 된다.

즉 이를 통해 지금으로부터 1년 후에 적용될 금리를 구할 수 있으며, 미래 금리에 대한 예측이 가능하다. 그것을 무어라고 하는가? 선도금리(forward rate)라고 한다.

| | Zero | Forward |
|---|---|---|
| 2002-01-29 | | |
| 2002-04-29 | 4.47% | |
| 2002-07-29 | 4.49% | 4.51% |
| 2002-10-29 | 4.52% | 4.58% |
| 2003-01-29 | 4.54% | 4.60% |
| 2003-04-29 | 4.75% | 5.59% |
| 2003-07-29 | 4.90% | 5.65% |
| 2003-10-29 | 5.01% | 5.67% |
| 2004-01-29 | 5.11% | 5.81% |




아래를 보자.




위의 그래프를 보면, 만기 1년짜리 금리에서는 어떤 cashflow도 없고 2년짜리부터 생겼음을 알 수 있다. 예를 들어 앞에 것을 $Z_1$, 뒤를 $Z_2$라고 하면, 지금으로부터 1년이 지난 후 적용될 만기 2년짜리 금리 F를 알아낼 수 있다.

그럼 이 F를 어떻게 알아내나? 기본적으로 이 세상에 "arbitrageur"는 없다고 가정하자. 즉 A란 사람이 만기 $T_2$ 까지 돈을 한번에 맡겨두는 것과, B라는 사람이 $Z_1$까지 맡겨놓고 새로 F로 맡긴다고 했을 때 두 사람이 동일한 금액을 얻어야 함을 식으로 쓰는 것이다.

위쪽부터 써 보면,

$$e^{Z_1 T_1} e^{f(T_2 - T_1)}$$

가 된다. 즉 이것이 2번에 나누어서 투자하는 사람이 마지막에 버는 돈이



다. 이것이 한큐에 끝낸 B 와 같아야 하므로,

$$e^{Z_1 T_1} e^{f(T_2 - T_1)} = e^{Z_2 T_2}$$

$$Z_1 T_1 + f(T_2 - T_1) = Z_2 T_2$$

$$f = \frac{Z_2 T_2 - Z_1 T_1}{T_2 - T_1}$$

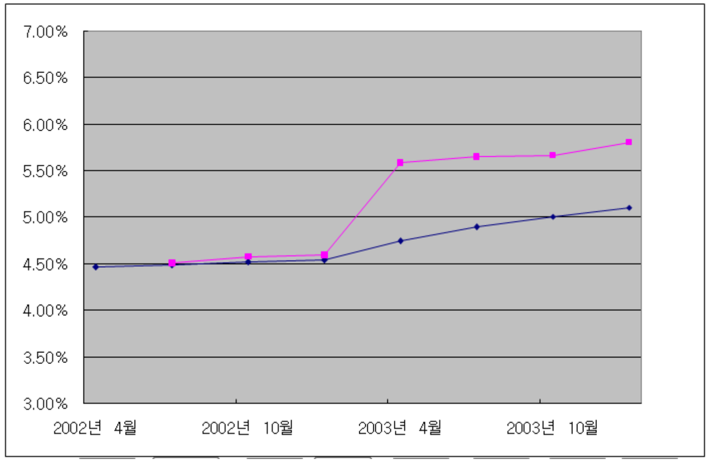
이렇게 된다. 즉 이것이 2년째의 Forward Rate이 된다.

아래의 테이블을 보자.

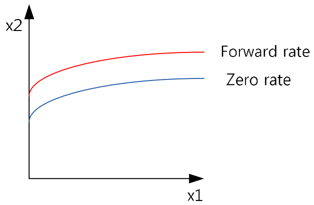
| | Zero | Forward |
|---|---|---|
| 2002-01-29 | | |
| 2002-04-29 | 4.47% | |
| 2002-07-29 | 4.49% | 4.51% |
| 2002-10-29 | 4.52% | 4.58% |
| 2003-01-29 | 4.54% | 4.60% |
| 2003-04-29 | 4.75% | 5.59% |
| 2003-07-29 | 4.90% | 5.65% |
| 2003-10-29 | 5.01% | 5.67% |
| 2004-01-29 | 5.11% | 5.81% |

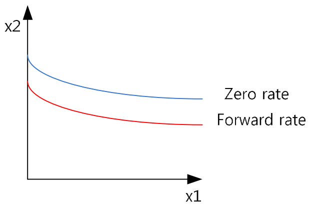
**dblab:**
f = (0.5×4.49% - 0.25×4.47%)/0.25

**dblab:**
f = (0.75×4.52% - 0.5×4.49%)/0.25




즉 Forward Rate는 항상 Zero Rate보다 위쪽에 있다. 이는 금리가 오를 것이라고 생각하기 때문에 그렇다. 반면 아래쪽으로 되어 있으면 forward rate 자체가 zero rate보다 아래쪽에 있게 된다. 즉, 아래와 같다.




그럼 이 zero rate는 어디에 쓰나? 4.51이라는 숫자가 지금으로부터 3개월 후에 적용될 것이냐는 것이고, 그것이 맞냐 틀리냐를 비교해 볼 수가 있다. 그런데 미래는 예측대로 잘 안 흘러간다. 그럼에도 파생 상품할때는 미래의 금리를 알아야 한다.

CD 금리 구할 때 사실 미래에 뭐가 나올지를 모른다. 그래서 2시점 이후의 CD는 다 forward rate를 이용해서 구한다.

# 금융공학14 - Credit Risk Measurement, BIS

2007년 5월 24일 목요일
오후 1:15

- **Credit Risk 측정 [Chapter 20]**

  Credit risk를 측정하는 여러 방법들이 있는데, 지금도 많이 사용하고 이론적으로 근거가 있는 것으로는 Option-theoretic approach가 있다.

- **Option-theoretic Approach**
  - Black & Scholes(1973), Merton(1974)
  - Corporate liabilities as contingent claims on the asset of the firm
  - Firm's market value is the fundamental state variable

- **Assumption**

  Consider an economy with a financial market, where uncertainty is modeled by some probability space.

  Consider a firm with market value V = V(t)

  The firm is financed by equity and a zero coupon bond with face value K and maturity date T.

| | |
|---|---|
| Asset | Liability(T) |
| | Equity |

즉 이 때 일정 시점이 지나서 P 시점에 회사를 청산한다고 해 보자. 그리고 그 현금을 원래 돈을 댔던 사람들에게 되돌려 준다고 하자.



이 때 Liability 부분을 보면, 이 사람들에게는 어떤 채권을 발행하였는가?에 대한 질문을 던질 수 있다. 이 때 Zero coupon bond를 발행하였다고 볼 수 있다. (만기 T, 행사 K) 즉 이걸 통해서 돈을 조달한 다음에 그 때부터 회사를 운영한다고 볼 수 있는 것이다. 그리고 처음 시점(zero 시점)의 기업의 가치를 V(0)이라고 보자.

그리고 회사 운영을 잘 하면 기업의 가치가 계속 불어날 것이다. 이 V(0)이라고 하는 기업의 가치는 잘 될 수도 있고 잘 안 될 수도 있다. 그렇게 이리저리 막 움직이다가 만기 시점의 기업 가치는 V(T)가 된다. 이는 만기 시점에 가지는 전체 가치가 되는 것이다.

그리고 만기 시점에서는 V(T)를 다 팔아서 liability를 갚고 나머지를 가지고 equity를 가진 사람들에게 나누어 주는 것이다. 이를 표로 나타내면 아래와 같다.

- **Payoffs to the firm's liabilities at maturity**

| | **Assets** | **Bonds** | **Equity** |
|---|---|---|---|
| **No default** | V(T) ≥ K | K | V(T)-K |
| **Default** | V(T) < K | V(T) | 0 |

이 표를 이해할 줄 알아야 한다. 이 표를 식으로 써 보면,

**Value of Bonds at T**

$$B(T) = \min(K, V(T)) = K - \max(0, K - V(T))$$

**Value of Equity at T**

$$E(T) = \max(0, V(T) - K)$$

이제 한 번 분석해 보도록 하자.

만기 시점에 V(T) > K이면 부도가 발생하지 않은 것이다. 이 경우 채권자들은 K를 가져간다. 또한 V(T)<K이면 부도 발생이므로 이 경우 채권자들은 V(T)를 가져간다. 즉 둘 중 적은 것을 가져간다. 이를 나타내면 B(T) = min(K, V(T) )가 된다. 그런데 이 min 식을 max에 대한 식으로 바꾸어서 쓸 수 있다. 그러면,

$$B(T) = K - \max(0, K - V(T))$$

즉 풋옵션의 형태가 된다.

위의 식을 보면, 0 시점에서 V(T)가 어떻게 될지는 잘 모른다. 그래서 볼튼은 이것이 stochastic differential equation을 따른다고 생각하였다. 즉 기업의 가치도 Geometric brownian motion 을 따른다고 본 것이다. 이를 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = m dt + s\, dW_t$$

이 때 기업의 변동성은 무엇인가? 바로 주가 수익율의 변동성이다. 그런데 이는 기업 가치의 수익율의 변동성이기도 하다. 약간 어려운 이야기인데, 기업 가치는 주가에 반영이 되므로, 기업 가치를 구할 때 주가 수익율을 반영하자는 이야기이다.

그리고 Equity holder의 입장에서 이야기 해 보자. 이들은 부도 시에는 아무 것도 못 받고(0), 부도가 아닐 때에는 채권자가 가져가고 남은 V(T)-K만큼을 받게 된다. 따라서 이를 수식화 하여 표현하면 max(0, V(T) - K) 가 된다.

즉 Equity holder는 기업 가치에 대한 call option을 가지고 있는 사람이라고 보면 된다. 그리고 Bond holder는 K 하나 가지고 풋옵션 하나 판 것을 가지고 있는 사람이라고 보면 된다. 볼튼은 이걸 가지고 부도의 확률을 계산할 수 있다고 주장하였다.



**Assuming a geometric Brownian motion**

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu dt + \sigma dW_t$$

**The value of defaultable bond (부도날 수 있는 채권의 가치)**

이는 아까 말한대로 K하나 가지고 풋옵션 하나 판거랑 똑같다.

$$B_0 = KB_0^{Rf} - BSPut\,(V(0), K, T, r, s)$$

**Default probability**

V(T) < K이면 부도가 난 것이며, 이 확률은 아래와 같다.

$$P(V(T) < K) = \Phi\left[\frac{\ln(\frac{K}{V(0)}) - mT}{s\sqrt{T}}\right]$$

$$\approx \Phi\left[\frac{-\ln(\frac{V}{K}) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] = \Phi[-d_1]$$

이는 아래를 만족할 때 성립한다.

$$S_0 = V(0), m = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

- **Stress testing**

A generic term describing various techniques used by financial firms to gauge their potential vulnerability to exceptional but plausible events.
여기에는 아래와 같은 종류가 있다.

- **Simple sensitivity analysis**

  간단한 민감도 분석으로서, 변수 1개만을 가지고 분석하는 분석법이다. 예를 들어 환율이 갑자기 하락한 경우 달러를 재산으로 가지고 있던 사람들은 손해를 보게 될 것이다. 이 때 환율 하나, 주가 하나만을 움직여보는 approach를 SSA라고 한다.

- **Scenario analysis**

  사실 환율만 갑자기 하락하고 나머지는 그대로 있다고 하는 것은 생각하기 힘든 모습이다. 따라서 몇 가지 가능성이 있는 시나리오를 짜서 분석해 보는 접근 방식이 있다. 그리고 그런 시나리오에 대해서 포트폴리오가 얼마나 손상을 입을까를 재는 방법을 시나리오 분석이라고 한다.

- **Maximum loss approach**

  거의 안 씀

- **Extreme value theory**
  역시 거의 안 씀. 통계학에서 보면 극단치 이론이 있다. 어떤 분포가 극한의 값을 가질 때 어떤 분포를 쓰는가를 연구하는 학문이다. 그런데 실제로 이걸 통해서 BIS가 나온다. 2000년도 초반쯤 전 세계 은행에 조사를 하면서 여러 스트레스 테스팅 기법을 소개하였는데, 그 은행들 중 딱 1군데가 EVT를 쓴다고 하였다. 그 은행 들어갈 거 아니면 안 쓰는게 낫다.

- 용어 정의



- **PD : Probability of Default (부도 확률)**
- **LGD : Loss given default (부도시 손실)**
  예를 들어 우리가 은행인데 누구에게 1억을 빌려줬다고 하자. 이 때 1억을 빌려주면 1억이 다 없어진다고 생각하는데, 실제로는 아니다. 부도나서 도망다니고 있으면 쫓아가서 돈 내놓으라고 한다. 이걸 전문용어로 "채권 추심"이라고 한다. 예를 들어 담보가 있으면 그 담보를 법적으로 뺏은 다음에 경매에다 붙인다든지, 아니면 제2, 제3 금융권 넘겨서 집 찾아가서 문 두드리고.. 그런 식으로 회수를 한다. 그럼에도 불구하고 회수하지 못하는 금액을 LGD라고 한다.
  참고로 LGD = 1 - Recovery Rate 이다.

- **EAD : Exposure At default**
  이는 부도시에 노출되어 있는 금액을 말한다. 예를 들어 1억 빌려주었는데도 부도 금액이 1억이 아닌 경우가 있다. 대표적인 예로는 마이너스 통장이 있다. 그런데 마이너스 통장에도 한도가 있다. 이것이 예를 들어 1,000만원이라고 친다면, 부도 났을 때 1,000만원 부도라면 쭉 마이너스로 내려가다가 중간에 default 선언을 할 수가 있다. 이 경우 한도는 사실 1,000만원이지만 그 보다는 작은 숫자(약 600-800정도)가 부도에 노출될 것이다.
  참고적으로 BIS는 무엇인가? 일정금을 자기자본으로 쌓는 것이다. 이 때 1,000만원을 다 빌려준 다음에 BIS 쌓으면 좀 클 테지만, 600만원에서 멈췄다면 그것만큼만 부도에 노출될 것이다. 따라서 BIS 구할 때 EAD는 중요 개념 가운데 하나이다.

- **M : Maturity**

- **Correlation between credit exposure**
  2명의 차주(돈 빌려간 사람)가 통계적으로 인디펜던트 한 것이 아니고 어떤 상관관계가 있다. 예를 들어 A, B 기업이 있는데 둘 다 미국에 수출하는 기업이라고 하자. 그런데 갑자기 미국 경기가 나빠졌고 둘이 같은 영역에 있으면 둘 다 부도가 날 확률이 높아진다. 그래서 이 때의 correlation 값을 알아야 한다.

- **Internal Ratings Based Approach**

BIS 비율이 무언지는 아는가? 각 은행이 자기가 대출해 준 금액에 대해서 항상 8%를 가지고 있어야 함을 말한다. 그런데 이 룰, 즉 8% 룰에 문제가 좀 있었다. 즉 어느 정도의 자기 자본을 가지고 있어야 누군가가 부도가 나더라도 자기 자본을 통해서 예금주에게 돈을 돌려줄 수 있다. 그런데 이 비율을 8%라고 자의적으로 결정을 해 버렸다. 따라서 은행 입장에서는 이 8%만 지키면 된다.

그래서 어떻게 하는가? 같은 금액을 A란 사람에게 빌려줘도 되고 B에게 빌려줘도 된다면, 일부러 조금 더 위험한 사람에게 빌려준다. 그럼 신용도가 낮기 때문에 돈을 더 많이 벌게 된다. 그래서 오히려 BIS 비율이 더 역효과를 내고 은행을 좀 더 부실화 시키게 된다. 이런 식의 나쁜 점이 있다는 것을 알고 있었는데, 그래서 Internal Rating 기법을 도입하기 시작한 것이다. 이것이 바로 Basel II 식이다.

$$RWC = \min\left[\frac{LGD}{50} \times BRWC, 12.5 \times LGD\right]$$

$$BRWC = 976.5 \times \Phi\left[1.118 \times \Phi^{-1}(PD) + 1.288\right] \times \left(1 + \frac{0.0470 \times (1 - PD)}{PD^{0.44}}\right)$$

RW = Risk weight
BRW = Benchmark risk weight

위쪽에 있는 식이 기업에 대출해 줬을 때의 Risk를 측정하는 식이다. 이것의 기준은 100%이며, 높을 수도 있고 낮을 수도 있다. 1억을 빌려줬는데 Risk rate를 계산해서 빌려준 돈과 Risk rate를 곱한다고 하여 보자. 즉 그 경우에는 실제로 1억밖에 안 빌려줬는데, 위험도를 감안해서 6억을 빌려준 것처럼 가중치를 곱해준다는 의미이다.(그것이 BRW임) 즉 은행으로 하여금 더 이상 Risk가 큰 쪽에 돈을 빌려주어야 하는 인센티브를 없애주는 것



이다. 이걸 계산하는 식이 바로 아래와 같은 것이다.

$$RWC = \min\left[\frac{LGD}{50} \times BRWC, 12.5 \times LGD\right]$$

이 식에서 대부분은 왼쪽에서 Minimum 값이 결정된다. 오른쪽 숫자는 그냥 upperbound라고 생각하면 된다. (예를 들어 5,000% 처럼 너무 커지면 안된다.) 즉 대부분은 왼쪽에서 결정된다.

$$BRWC = 976.5 \times \Phi\left[1.118 \times \Phi^{-1}(PD) + 1.288\right] \times \left(1 + \frac{0.0470 \times (1 - PD)}{PD^{0.44}}\right)$$

이 숫자들은 뭘까? 2002년도 이야기인데, 그 이후에는 식이 약간 변하기는 했다. 뭐 일단 아래를 보자.

$$BRWC = 976.5 \times \Phi\left[1.118 \times \Phi^{-1}(PD) + 1.288\right] \times \left(1 + \frac{0.0470 \times (1 - PD)}{PD^{0.44}}\right)$$
$$= (1) \times (2) \times (3)$$

(1) : Assuming PD = 0.7%, LGD = 50%, RW should be 100%
(2) : Sum of expected loss and unexpected loss for a hypothetical portfolio (T = 1 year, LGD = 100%, rho = 0.20)
(3) : Correction for the maturity should be 3 years

(2)의 경우에는 기대된 손익과 기대되지 않은 손익의 합이다. 그런데 (2)는 참 이해하기 어렵다. 그리고 저 숫자는 어떻게 나왔는가? 이걸 보려면 Gordy의 Paper를 참고해서 공부해야 한다.

- **손실의 분포**

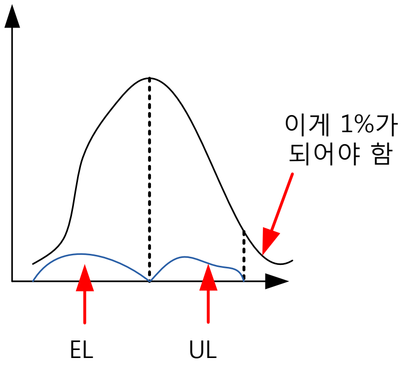
예를 들어 100억을 누구에게 보내줬다고 하자. 그런데 부도가 전혀 나지 않아서 손실이 0일 확률도 있고, 1억이 부도 날 수도 있고 100억이 부도날 수도 있을 것이다. 그래서 아래와 같은 분포를 생각할 수 있을

것이다.

E(L) = Expected loss = $E_L$

여기에서 Expected loss는 이 부도로 인한 손실의 기대값이라고 보면 된다.

또한 기대하지 않은 손실도 있을 것이다. 이를 unexpected Loss라고 하고, $U_L$로 놓는다. 이는 어떻게 결정되는가? $U_L$은 아래 분포에서 오른쪽 부분이 1%를 만드는 critical value에서 $E_L$을 빼 주면 된다.




- **Credit Metrics**

  Merton's Model

$$p_i(y) = P[R_i < C_i]$$
$$R_i = v_{i0}\epsilon_i - \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}$$



$$p_i(y) = P\left[e_i < \frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right] = \Phi\left(\frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right)$$

- p: Probability of default
- R: Rate of Return
- C: Threshold
- ε: Idiosyncratic risk
- Y: Systemic risks
- v: weights

이것이 Merton의 모형이다.

우선 첫번째 식은 부도 확률은 rate of Return이 주어진 임계치보다 적을 확률로 정의된다.
그리고 rate of Return은 가중치x비체계적 위험 - 체계적 위험x가중치 의 형태로 구할 수 있다.
이를 종합하면 부도 확률은 비체계적 위험이 (임계치 + 체계적 위험x가중치)/가중치 보다 적을 확률과 같다. 즉 비체계적 위험이 적으면 적을수록 부도 위험이 줄어든다고 생각해도 된다.

- **Credit 모형의 3가지**
  i. **Credit Metrics : Risk metrics**
     이건 JP morgan에서 만들었다. 여기에서는 전세계 모든 지사의 risk를 하나의 숫자로 나타내어서 계산한 다음에 4:15에 CEO 책상에 올려둔다. 즉 오늘 하루동안 전 세계 JP 모건에서 얼만큼의 Risk를 Take 했는지를 보고자 한다는 것이다. 이걸 보면 한 달 간의 추세가 나온다. 래서 이 사람들이 그걸 가지고 상품화를 시켰다. 이는 시장 risk를 측정하는 방법론이다.
     이건 지금도 많이 사용된다. CM(Credit Manager)이라고 부르는데, 우리나라에는 3군데 공식 딜러가 있다.

i. **Credit Risk+**

이건 CS 그룹(Credit Suisse)에서 만들었다. 이것도 커다란 금융 그룹이다. 여긴 보험 쪽에 강한 금융 그룹으로 유명하다.
이 모델은 보험에서 사용되는 통계학이 많이 들어가는 모형이다. 그런데 특이한것이 뭔가? 방법론은 있는데 Software는 만들어서 팔지 않는다. 1998년도 후반에 이걸 가지고 우리나라 사람들 몇 명이서 회사를 만들어서 하고 있다. 이 문서를 보면 완전히 통계학 책이다. 그걸 보고 실제로 프로그램을 짜서 팔았다. 삼성 생명도 이게 있었다.

i. **Credit Portfolio View**

이건 매킨지가 만들었다. 그런데 어떤 모형인지 아무도 모른다. 다른 두 회사들은 나름대로 상품화 시켜서 내보냈는데, 컨설팅 회사는 다른 회사에 절대 알려주려고 하지 않는다. 그래서 실제 매킨지에 다니는 사람에게 물어봐도 이건 알지 못한다. 즉 대충 어떻게 돌아가는지만 알려져 있고 detail은 알려져 있지 않는다는 것이다.

Gordy의 모형은 이 2가지가 어떻게 같고 어떻게 다른지에 대한 논문이다. 이거 이해를 해야만 BIS 식이 이해가 된다.

- **VaR = Value at Risk [Chapter 18:441 page]**

즉 예를 들어 1%의 확률로 9억 달러를 잃을 수 있다, 할 때 그 값을 VaR이라고 한다. VaR에는 기간이 붙을 수도 있는데, 여기에서는 영구적인 것을 가정하여 아래와 같이 구하였다.

$$L_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} LGD_i EAD_i}{\sum_{i=1}^{n} EAD_i}$$

$$EL_\infty = E(LGD) \times PD$$



$$L_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} LGD_i EAD_i}{\sum_{i=1}^{n} EAD_i}$$

$$EL_\infty = E(LGD) \times PD$$

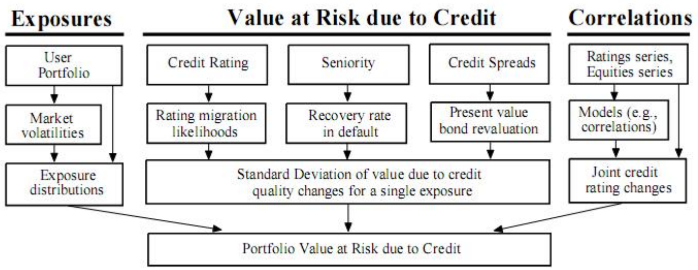
$$VaR_\infty = E(LGD)\, p(y_q)$$

즉 EL은 부도로 인한 손실의 기대값, VaR은 부도로 인해 잃을 수 있는 금액의 값이라고 보면 된다.

주식을 100억원어치 가지고 있다고 해 보자. 주가가 올라가면 그 가치가 오르고, 주가가 떨어지면 그 가치가 떨어질 것이다. 이 때 VaR은 그 유의 수준을 정한다. 그럼 왼쪽이 1%가 되는 값이 얼마인가? 그것을 VaR이라고 한다.

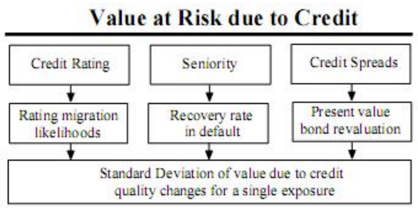
하루 동안에 99%의 확률을 가지고 잃어버린 돈이 9억을 넘지 않는다고 한다? 이는 99%의 confidence를 가지고 잃어버린 돈이 9억을 넘지 않는다라고 이야기 할 수 있는 것이다. 즉 이건 Credit 때문에 일어나는 것이다. 이 때 신용도가 변화함에 따라서 얼마만큼의 가치를 잃어버릴 수 있을까를 계산하고자 하는 것이다.

실제 CreditMetrics의 구현을 보면, 아래와 같이 3가지 축이 있다. 왼쪽은 Exposure 이며, EAD 부분에 관계된다. 오른쪽 부분은 Correlation이다. 즉 두 차주의 부도의 상관관계에 관계된다. 그리고 Main body는 Credit rating, seniority, credit spread 등에서 뽑아내게 된다.



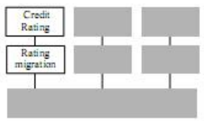

아래와 같이 채권이 하나밖에 없을 때, 가운데 부분만 이야기 해서 구해보도록 하자.

## 1. Value at Risk Due to Credit




이 중에서도 왼쪽 부분을 공부해 보도록 한다.

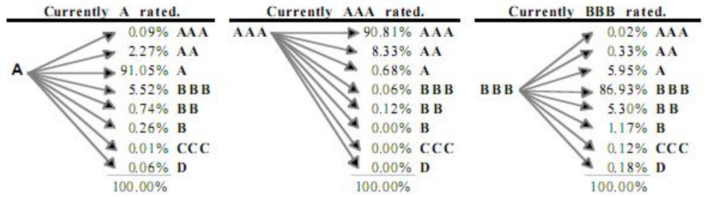
### A) Credit Rating - Rating Migration




우선 내가 가지고 있는 채권이 Triple B라고 해 보자. 이 때 지금으로부터 1년 후 어떻게 될까를 생각해 보자. 이는 1년 후에 등급이 좋아질 수도 있고, 나빠질 수도 있다. 즉 Single A인 것은 나중에도 Single A로 갈 확률이 높다. 그럼 뭘로 이걸 구할 수 있는가? 우선은 과거의 통계적 자료를 바탕으



로 구할 수 있다.




이런 식으로 1년 후 어떻게 될지를 구할 수 있다. 각각의 확률들은 다 알고 있다. 그래서 Credit rating을 통해서 Rating migration을 알 수 있게 된다.

이걸 잘 정리한 것을 전이 행렬, transition matrix라고 한다. 아래와 같이 왼쪽 컬럼은 initial rating이고 오른쪽은 옮겨진 rating이다. 그리고 한 번 부도(default)로 들어가면 다시 빠져나오지 않는다.

*Table 2.1*
**One-year transition matrix (%)**

| Initial Rating | Rating at year-end (%) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Default |
| AAA | 90.81 | 8.33 | 0.68 | 0.06 | 0.12 | 0 | 0 | 0 |
| AA | 0.70 | 90.65 | 7.79 | 0.64 | 0.06 | 0.14 | 0.02 | 0 |
| A | 0.09 | 2.27 | 91.05 | 5.52 | 0.74 | 0.26 | 0.01 | 0.06 |
| BBB | 0.02 | 0.33 | 5.95 | 86.93 | 5.30 | 1.17 | 0.12 | 0.18 |
| BB | 0.03 | 0.14 | 0.67 | 7.73 | 80.53 | 8.84 | 1.00 | 1.06 |
| B | 0 | 0.11 | 0.24 | 0.43 | 6.48 | 83.46 | 4.07 | 5.20 |
| CCC | 0.22 | 0 | 0.22 | 1.30 | 2.38 | 11.24 | 64.86 | 19.79 |

*Source: Standard & Poor's CreditWeek (15 April 96)*

이는 Stochastic process이며, 한 state에서 다른 state로 바뀔 확률 계산하는 그런 문제이다.

위의 셋은 어디까지나 하나의 예로 주어진 것인데, S&P가 제공하는 dataset은 무진장하다. 여하튼 이를 통해 Cumulative Default Rate, 미국의 투기 등급 부도율이 어떻게 변해왔나를 조사할 수 있다. 이 Transition matrix는 2005.1부터 2005.12까지 전 세계 전체 다 global transition matrix를 계산한 것이다.

## B) 우선순위로 인한 회수율 계산

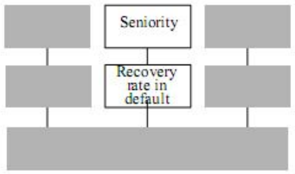



*Table 2.2*

**Recovery rates by seniority class (% of face value, i.e., "par")**

| Seniority Class | Mean (%) | Standard Deviation (%) |
|---|---|---|
| Senior Secured | 53.80 | 26.86 |
| Senior Unsecured | 51.13 | 25.45 |
| Senior Subordinated | 38.52 | 23.81 |
| Subordinated | 32.74 | 20.18 |
| Junior Subordinated | 17.09 | 10.90 |

*Source: Carty & Lieberman [96a] —Moody's Investors Service*

채권의 우선순위가 있다. 우리나라로 치자면, 반드시 세입자보다 더 높은 순위로 은행에다가 먼저 자기 이름을 써야 한다. 즉 세입자가 먼저 있으면 대출을 안 해준다. 왜냐하면 부도나면 세입자가 제일 먼저 돈을 가지고 가기 때문이다. 이런 식으로 모든 종류의 채권에는 우선순위가 있다.

순위가 높은 채권이면, 회사가 부도가 났을 때 등급이 어떤 등급이냐에 따라서 높은 등급의 채권일수록 recovery rate이 높게 된다. 따라서 채권의 신용 등급 자체도 중요하지만, 어느 우선순위(Seniority)에 있느냐도 중요하다.

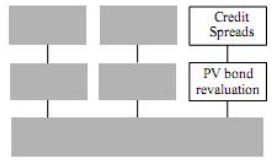
Seniority는 우선순위, secured는 담보가 있느냐의 여부이다. 따라서 Senior secured는 "담보 선순위", Senior unsecured는 "무담보 선순위"가 된다.

그렇다면 부도가 난 경우의 채권의 가치는 무엇인가? 이 경우에는 자기의 회수율만큼 줄어든다고 생각하면 된다. 예를 들어 53%를 회수한다고 하면, 부도가 났을 경우 100원이 53원이 된 것이다. 실제 미국에서는 부도 채권만 거래하는 시장이 있다.



만약 거래하던 채권에서 부도가 나는 경우 부도채권만 거래하는 시장에 가서 판다. 그럼 그 시장에서 가격이 형성된다. 그리고 50원 짜리를 받고 나서 실제로 50원 이상을 추심하는데 성공하면 이를 산 기업들은 돈을 벌 수 있는 것이다. 한 때 국가 부도에 투기를 하는 경우도 있었다. 즉 국가가 부도가 나는 경우에는 그 국가가 발행하는 채권의 가격이 100원짜리가 10센트로 떨어진다. 그걸 막 사 놓았다가 그 국가가 다시 부도 등급이 아닌 더 높은 등급으로 올라가면 가격이 90센트로 올라가고 그런다. 그런 시장들이 존재한다.

## C) Credit Spreads - PV bond revaluation




그런데 문제는 부도가 안 난 채권도 가격이 변해야 한다. 신용 등급이 변함에 따라서 그 채권도 변화한다는 의미이다. 즉 굉장히 안 좋은 채권이 있었는데, 신용 등급이 올라갔다? 그럼 가격도 따라서 올라갈 것이다. 그것을 어떻게 계산할 것인가? Forward zero rate을 이용하여 구하게 된다.

*Table 2.3*

**Example one-year forward zero curves by credit rating category (%)**

| Category | Year 1 | Year 2 | Year 3 | Year 4 |
|---|---|---|---|---|
| AAA | 3.60 | 4.17 | 4.73 | 5.12 |
| AA | 3.65 | 4.22 | 4.78 | 5.17 |
| A | 3.72 | 4.32 | 4.93 | 5.32 |
| BBB | 4.10 | 4.67 | 5.25 | 5.63 |
| BB | 5.55 | 6.02 | 6.78 | 7.27 |
| B | 6.05 | 7.02 | 8.03 | 8.52 |
| CCC | 15.05 | 15.02 | 14.03 | 13.52 |

즉 이는 지금으로부터 1년 후 선도금리를 계산하는 것이라고 생각하면 된다. 즉 이를 카테고리별로 나누어서 계산해 놓은 것이 위의 식이다.

**Recall that this bond has a five-year maturity, and pays annual coupons at the rate of 6%.**

예를 들어서 rc=6%이고, 현가 $100짜리 BBB 신용등급 채권이 있는데 A로 갔다고 해 보자. 이 때 forward rate table을 이용해서 구한다는 것이다. 즉 이 채권의 가격은 아래와 같이 계산할 수 있다. (앞에 100이 빠졌다. 더 더 해주면 된다)

$$V = 6 + \frac{6}{(1+3.72\%)} + \frac{6}{(1+4.32\%)^2} + \frac{6}{(1+4.93\%)^3} + \frac{6}{(1+5.32\%)^4} = 108.66$$

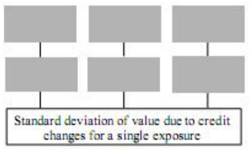
즉 채권이 BBB -> A로 갔을 때 그 가격은 108.66이 된다는 것이다.

이런 식으로 BBB 채권의 forward value를 구하면 아래와 같다.

*Table 2.4*
**Possible one-year forward values for a BBB bond plus coupon**

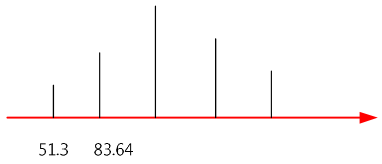
| Year-end rating | Value ($) |
|---|---|
| AAA | 109.37 |
| AA | 109.19 |
| A | 108.66 |
| BBB | 107.55 |
| BB | 102.02 |
| B | 98.10 |
| CCC | 83.64 |
| Default | 51.13 |

이제 필요한 정보는 다 모였다. 이 포트폴리오의 가치의 분포를 구하자.






## D) Credit Risk Estimation




이런 식의 분포에서부터 계산하는 것이다.

*Table 2.5*
**Calculating volatility in value due to credit quality changes**

| Year-end rating | Probability of state (%) | New bond value plus coupon ($) | Probability weighted value ($) | Difference of value from mean ($) | Probability weighted difference squared |
|---|---|---|---|---|---|
| AAA | 0.02 | 109.37 | 0.02 | 2.28 | 0.0010 |
| AA | 0.33 | 109.19 | 0.36 | 2.10 | 0.0146 |
| A | 5.95 | 108.66 | 6.47 | 1.57 | 0.1474 |
| BBB | 86.93 | 107.55 | 93.49 | 0.46 | 0.1853 |
| BB | 5.30 | 102.02 | 5.41 | (5.06) | 1.3592 |
| B | 1.17 | 98.10 | 1.15 | (8.99) | 0.9446 |
| CCC | 0.12 | 83.64 | 1.10 | (23.45) | 0.6598 |
| Default | 0.18 | 51.13 | 0.09 | (55.96) | 5.6358 |
| | | Mean = | $107.09 | Variance = | 8.9477 |
| | | | | Standard deviation = | $2.99 |

이런 식으로 위험도를 구하게 된다.

## 2. Portfolio risk calculation

이미 알고 있던 채권에 채권을 하나 더 샀다고 해보자. 상황은 아래와 같다.

In Chapter 2, we explained the methodology used by CreditMetrics to obtain the credit risk for a stand-alone exposure. Here, we extend our methodology to a "portfolio" of two exposures. The chapter is organized as follows:

- we elaborate on the joint likelihoods in the credit quality co-ovements;
- we extend our credit risk calculation for stand-alone exposure discussed in Chapter 2) to the multiple exposure case; and
- we discuss the calculation of marginal risk estimation, which identifies over-concen-trations within a portfolio and thus suggests potential risk-mitigating actions.

For clarity, we discuss the required steps to calculate credit risk across a portfolio with an example portfolio consisting of the following two specific bonds:

Bond #1: BBB rated, senior unsecured, 6% annual coupon, five-year maturity*

Bond #2: A rated, senior unsecured, 5% annual coupon, three-year maturity*

즉 채권 2개가 있는데 하나는 BBB이고, 또 다른 하나는 A라고 하자. 이 때 A도 BBB도 각기 8개의 다른 state로 넘어갈 수 있다. 이를 동시에 고려하면 8*8=64개가 나온다.

현재 우리가 알고 있는 것은 하나가 다른 하나로 넘어갈 때의 이야기이다. 그런데 이제 2개가 조인된 것이다.

이 때 둘 다 현재 State를 유지할 확률은 아래와 같다. 가장 쉬운 계산법이다.

$$\underbrace{79.15\%}_{\substack{\textit{Chance both}\\ \textit{retain current rating}}} = \underbrace{86.93\%}_{\substack{\textit{Chance a BBB}\\ \textit{remains at BBB}}} \cdot \underbrace{91.05\%}_{\substack{\textit{Chance an A}\\ \textit{remains at A}}}$$

이런 식으로 서로의 움직임이 independent 할 때에는 그냥 곱해버리면 된다. 그런데 현실 세계에서는 Correlation이 존재할 수 있기 때문에 이를 고려해 주어야 한다.



여하튼 상관관계가 0이라고 치고, 이를 각 셀별로 곱한 표는 아래와 같다.

| Obligor #1 (BBB) | | Obligor #2 (single-A) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Default |
| | | 0.09 | 2.27 | 91.05 | 5.52 | 0.74 | 0.26 | 0.01 | 0.06 |
| AAA | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| AA | 0.33 | 0.00 | 0.01 | 0.30 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| A | 5.95 | 0.01 | 0.14 | 5.42 | 0.33 | 0.04 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| BBB | 86.93 | 0.08 | 1.98 | 79.15 | 4.80 | 0.64 | 0.23 | 0.01 | 0.05 |
| BB | 5.30 | 0.00 | 0.12 | 4.83 | 0.29 | 0.04 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| B | 1.17 | 0.00 | 0.03 | 1.06 | 0.06 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| CCC | 0.12 | 0.00 | 0.00 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Default | 0.18 | 0.00 | 0.00 | 0.16 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

즉 이건 migration을 나타내는 표가 아니라, 2개가 동시에 어떤 등급으로 감을 나타내는 확률이다. 자, 2개일 때에도 이 정도인데, 적게는 50 많게는 300개인 경우 가능한 경우의 수는 총 몇 개나 되겠는가? 무척 많아질 것이다.

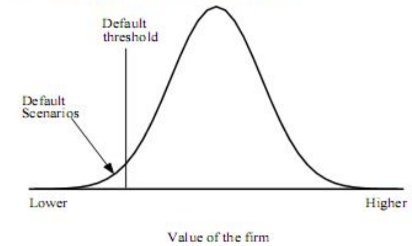
이걸 표로는 못 그린다. 또한 동시적인 거시경제 변수에 의해서 GDP가 떨어지면 우리나라 모든 기업의 부도 확률이 높아진다. 게다가 만약 correlation까지 주어지면 어떻게 되는가? 예를 들어 누가 0.2라고 주었다면 어떻게 해야겠는가?

이것은 Joint movement를 어떻게 할 것인가를 물어보는 문제와 같다.

We illustrate a framework for thinking about default as a function of the In underlying (and volatile) value of the firm. This framework was first proposed by Robert option theoretic valuation of Merton (see Merton [74]), and is often referred to as the debt.

다시 부도로 돌아가자. Merton은 부도냐 아니냐만 설명한다. 그리고 특정 threshold 이하로 떨어지면 부도라고 보았다. 아래로 치면 Default threshold 아래로 떨어지면 부도일 것이다.

*Chart 3.2*
**Model of firm value and its default threshold**

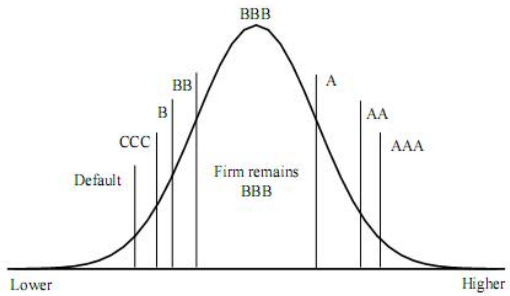



즉 기업의 가치 자체는 어떻게 되는지 모른다. 그런데 수익은 정규 분포를 한다고 가정할 수 있다. 이 때 어떤 특정한 threshold value보다 작아지면 부도라고 하자, 라고 생각한 것이다.

그런데 이 생각을 조금 더 확장시키면 우리가 알고 있는 부도율의 data와 매칭시킬 수 있다.

즉 아래와 같이 CCC를 고려하여 계산할 수도 있다. 반면 AAA가 될 수도 있다. 그 경우 수익율이 아주 좋아지면 수익율이 C가 될 것이다. 이 부도율 확률을 보고 Threshold 값들을 다 찾아내는 것이다. 이것이 BBB 기업에 대한 Threshold value들이 되는 것이다. 그리고 이것을 A 기업에 대해서도 고려해서 각각의 threshold 를 구해 줄 수 있을 것이다.

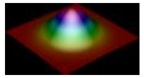
*Chart 3.3*
**Model of firm value and generalized credit quality thresholds**



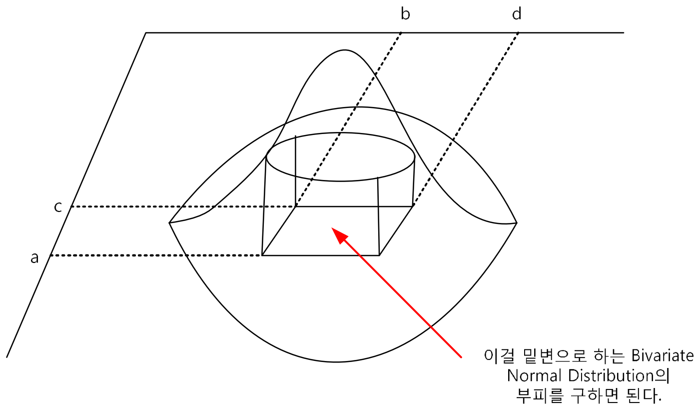

이것은 어떻게 구할 수 있는가? Bivariate distribution을 이용하여 구할 수



있다. 그런데 Rho가 0이 아닌 다른 숫자라면 이 distribution 형태가 어떻게 되는지를 명확하게 알 수 있다. 즉 함수식을 알고 있기 때문에 BBB인 기업이 여전히 BBB가 되고, 뭐 그런 threshold 를 보고 알 수 있을 것이다.



Bivariate Normal Distribution은 위의 형태와 같다. 이 때,




위의 분포를 적분하면 구할 수 있다. 이는

$$\int_c^a \int_d^b f(x_1, x_{2,} \rho) dx_1 dx_2$$

와 같다. 이것을 64개의 각 포인트에 대해서 각기 구하는 것이다. 그럼 64 개의 점이 나타날 것이고, 그것을 바탕으로 99%의 값(VaR)을 구하는 것이다.

## 3. Differing exposure types

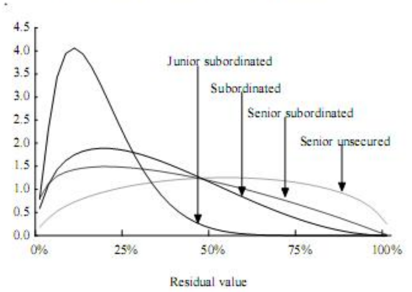
채권 뿐만 아니라 swap, forward 같은 것도 OTC 상품이기 때문에 장내 파생상품이면 Credit risk가 없다고 가정해야 한다. 그런데 그 사람이 그냥 도

망가면 swap을 어떻게 평가할 수 있는가? 즉 EAD가 어떻게 움직이느냐와 연결되는 이야기이다. 그런데 이 문제는 너무 실무적이기 때문에 그냥 채권만 있다고 가정하자.

## 4. Recovery rates (회수율)

회수율을 구하기 위해서는 좀 특이한 분포가 필요하다. 0보다는 크고 1보다는 작아야 하며, 100%를 넘을 수는 없다. 그리고 회수율이 -인 일도 있을 수 없다. 이런 0하고 1 사이의 분포는 뭐가 있나? 우선 Uniform distribution이 있을 수 있다. 그런데 실제로 이런 분포는 현실세계에서는 적용할 수 없으며, 좀 더 일반적인 분포를 들자면 Beta 분포를 생각해 볼 수 있다.

*Chart 7.2*
**Example beta distributions for seniority classes**




이는 두 개의 모수가 있는데, 이걸 어떻게 주느냐에 따라서 왼쪽으로 몰리거나 오른쪽으로 몰리거나 혹은 uniform이 되게 만들 수도 있다. 따라서 이걸 써야 되는데, 실제로는 많은 사람들이 잘 안 쓴다. 왜? 어려워서 그렇다. 여하튼 베타 분포를 쓰면 위와 같이 구해낼 수 있다.

## 5. Credit quality correlations

이제 실제로 상관계수(correlation)을 어떻게 구할 것인가에 대한 문제이다.



여기에는 몇 가지 방법이 있다.

### A) Historical 하게 관측을 한다.

이는 BBB와 A가 함께 움직인 것을 통계적으로 관측한 자료이다.

*Table 8.2*
**Historically tabulated joint credit quality co-movements**

| Firm starting in BBB | Firm starting in A | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Default |
| AAA | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| AA | 0 | 15 | 1,105 | 54 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | 978 | 44,523 | 2,812 | 414 | 224 | 0 | 0 |
| BBB | 0 | 12,436 | 621,477 | 40,584 | 5,075 | 2,507 | 0 | 0 |
| BB | 0 | 839 | 41,760 | 2,921 | 321 | 193 | 0 | 0 |
| B | 0 | 175 | 7,081 | 532 | 76 | 48 | 0 | 0 |
| CCC | 0 | 55 | 2,230 | 127 | 18 | 15 | 0 | 0 |
| Default | 0 | 29 | 981 | 67 | 7 | 0 | 0 | 0 |

그런데 이렇게 구하는 경우 주변에 0이 너무 많다. 문제는 historical 하게 0이었다고 해서 앞으로도 그러리라는 법은 없다는 것이다. 즉 역사에 없었던 경우는 앞으로도 없을 거라고 생각해 버릴 수 있다는 것인데, 이를 %로 표시하면 아래와 같이 나온다.

*Table 8.3*
**Historically tabulated joint credit quality co-movement (%)**

| Firm starting in BBB | Firm starting in A | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Default |
| AAA | - | - | - | - | - | - | - | - |
| AA | - | 0.00 | 0.14 | 0.01 | 0.00 | - | - | - |
| A | - | 0.12 | 5.64 | 0.36 | 0.05 | 0.03 | - | - |
| BBB | - | 1.57 | 78.70 | 5.14 | 0.64 | 0.32 | - | - |
| BB | - | 0.11 | 5.29 | 0.37 | 0.04 | 0.02 | - | - |
| B | - | 0.02 | 0.90 | 0.07 | 0.01 | 0.01 | - | - |
| CCC | - | 0.01 | 0.28 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | - | - |
| Default | - | 0.00 | 0.12 | 0.01 | 0.00 | - | - | - |

따라서 Beta를 쓰는 것이 더 나은 것이다. 이를 사용하면 적어도 0은 아닌 숫자를 구해낼 수 있다.

$$\rho = \frac{N\left(\frac{\sigma^2}{\mu - \mu^2}\right) - 1}{N - 1} \approx \frac{\sigma^2}{\mu - \mu^2}$$

Bivariate distribution이 있을 때, 2개를 적분하고 rho를 적절하게 하면 된다. 그러면 첫 번째 채권이 B에서 BB 사이에 들어가고, 두 번째 채권이 BBB에서 A 사이에 있을 확률을 구해 낼 수 있다. 이 식은 아래와 같다.

$$Pr\{Z_B < R < Z_{BB}, Z'_{BBB} < R' < Z'_A\} = \int_{Z_B}^{Z_{BB}} \int_{Z'_{BBB}}^{Z'_A} f(r, r'; \Sigma)(dr')dr$$

또한 correlation을 구해내기 위해 산업별 분류를 하고, 국가별로 산업별 분류에 해당하는 주가지수가 있느냐 없느냐를 고려한다. 즉 주가 지수간의 correlation를 보고 계산하는 것이다. 아래는 예제 테이블이다.

*Table 8.10*
**Country-industry index availability**

| Country | GNRL | AUTO | BFIN | BMED | CHEM | CSTR | ELCS | ENRG | ENMT | FOOD | HCAR | HOTE | INSU | MACH | MANU | MMIN | OGAS | PAPR | PUBL | TECH | TCOM | TXTL | TRAN | UTIL | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Australia | X | | X | X | X | X | | X | | X | | | X | | | | | X | | | | | X | | 10 |
| Austria | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Belgium | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Canada | X | X | X | X | X | X | X | X | | X | X | X | X | | | X | | | X | | | | X | | 15 |
| Finland | X | | X | | | | | | | | | | X | | | X | | X | | | | | | | 5 |
| France | X | X | X | | | X | | X | | X | | | | | | | | | | | | | | | 6 |
| Germany | X | X | X | | X | X | | | | | | | X | X | | | | X | | | | X | X | X | 11 |
| Greece | X | | X | | | | | | | | | | X | | | | | | | | | | | | 3 |
| Hong Kong | X | | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | X | 3 |
| Indonesia | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Italy | X | | X | | X | | | | | X | | | | | | X | | X | | | | | | | 6 |
| Japan | X | | X | X | X | X | X | X | | X | X | | X | X | | X | X | X | | | | X | X | | 16 |
| Korea | X | | X | | X | X | | | | X | | | X | X | | X | | X | | | | X | X | | 11 |
| Malaysia | X | | X | | | | | | | | | | | | | X | | | | | | | | | 3 |
| Mexico | X | | | | | X | | | | | | | | | | X | | | | | | | X | | 4 |
| New Zealand | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Norway | X | | X | | | | | | | | | | X | | | | | | | | | | | | 3 |
| Philippines | X | | | | | | | | | | | | | | | X | X | | | | | | | | 3 |
| Poland | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Portugal | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Singapore | X | | X | | | | | | | | | X | | | | | | | | | | | | | 3 |
| South Africa | X | | X | | | | | | | | | | | | | X | | | | | | | | | 3 |
| Spain | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Sweden | X | | X | | X | X | | | | | | | | | | | | X | | | | | | | 6 |
| Switzerland | X | | X | | X | X | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5 |
| Thailand | X | | X | | X | X | X | X | | X | X | X | X | X | | X | | X | X | X | | X | X | | 17 |
| United Kingdom | X | | X | X | X | X | X | X | | X | X | X | X | | | X | X | X | | | X | X | X | | 17 |
| United States | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | 24 |
| MSCI worldwide | | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | | X | | X | | | X | X | X | X | 19 |
| Total | 28 | 5 | 20 | 6 | 12 | 13 | 7 | 8 | 2 | 10 | 6 | 6 | 12 | 6 | 1 | 13 | 4 | 11 | 3 | 2 | 3 | 7 | 10 | 4 | 199 |

이런 식으로 데이터를 이용해 부도의 상관관계를 계산해 낸다.



## B) Asset이 3개인 경우

BBB, A, CCC의 3가지 채권이 있다고 해 보자. Transition matrix(TM)은 아래와 같다.

*Table 9.1*
**Transition probabilities (%)**

| Rating | Transition probability (%) Firm 1 | Firm 2 | Firm 3 |
|---|---|---|---|
| AAA | 0.02 | 0.09 | 0.22 |
| AA | 0.33 | 2.27 | 0.00 |
| A | 5.95 | 91.05 | 0.22 |
| BBB | 86.93 | 5.52 | 1.30 |
| BB | 5.30 | 0.74 | 2.38 |
| B | 1.17 | 0.26 | 11.24 |
| CCC | 0.12 | 0.01 | 64.86 |
| Default | 0.18 | 0.06 | 19.79 |

이 3개의 채권에 대해서 만기/쿠폰을 알면 각기 다른 등급이 되었을 때 가격이 어떻게 되는지를 알 수 있다.

*Table 9.2*
**Instrument values in future ratings ($mm)**

| Future rating | Value of issue ($mm) Firm 1 | Firm 2 | Firm 3 |
|---|---|---|---|
| AAA | 4.375 | 2.132 | 1.162 |
| AA | 4.368 | 2.130 | 1.161 |
| A | 4.346 | 2.126 | 1.161 |
| BBB | 4.302 | 2.113 | 1.157 |
| BB | 4.081 | 2.063 | 1.142 |
| B | 3.924 | 2.028 | 1.137 |
| CCC | 3.346 | 1.774 | 1.056 |
| Default | 2.125 | 1.023 | 0551 |

이 때 1번과 2번 2개만을 보았을 때, 이들이 각각 특정 등급에 있을 때 포트폴리오 가치가 어떻게 되느냐를 구해낼 수 있다.

*Table 9.3*
**Values of a two-asset portfolio in future ratings ($mm)**

| New rating for Firm 1 (currently BBB) | New rating for Firm 2 (currently A) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Default |
| AAA | 6.51 | 6.51 | 6.50 | 6.49 | 6.44 | 6.40 | 6.15 | 5.40 |
| AA | 6.50 | 6.50 | 6.49 | 6.48 | 6.43 | 6.40 | 6.14 | 5.39 |
| A | 6.48 | 6.48 | 6.47 | 6.46 | 6.41 | 6.37 | 6.12 | 5.37 |
| BBB | 6.43 | 6.43 | 6.43 | 6.42 | 6.37 | 6.33 | 6.08 | 5.33 |
| BB | 6.21 | 6.21 | 6.21 | 6.19 | 6.14 | 6.11 | 5.86 | 5.10 |
| B | 6.06 | 6.05 | 6.05 | 6.04 | 5.99 | 5.95 | 5.70 | 4.95 |
| CCC | 5.48 | 5.48 | 5.47 | 5.46 | 5.41 | 5.37 | 5.12 | 4.37 |
| Default | 4.26 | 4.26 | 4.25 | 4.24 | 4.19 | 4.15 | 3.90 | 3.15 |

앞으로 어떤 일이 일어날지 모르니까, 512개에 대한 확률값을 계산해야 하는 것이다. 이제는 Bivariate이 아니라 변수가 3개일 때의 distribution을 생각하고 적분하여 확률을 계산하는 것이다.

문제는 하나가 늘어날 때 마다 8배씩 더 커진다는 것이다. 그래서 simulation을 할 때 다 하는 것이 아니라 몇 개만 해 보아야 한다. 실제 채권의 포트폴리오가 아래와 같다고 하자.

*Table 11.1.*
**Example portfolio**

| Asset | Credit rating | Principal amount | Maturity (years) | Market value |
|---|---|---|---|---|
| 1 | AAA | 7,000,000 | 3 | 7,821,049 |
| 2 | AA | 1,000,000 | 4 | 1,177,268 |
| 3 | A | 1,000,000 | 3 | 1,120,831 |
| 4 | BBB | 1,000,000 | 4 | 1,189,432 |
| 5 | BB | 1,000,000 | 3 | 1,154,641 |
| 6 | B | 1,000,000 | 4 | 1,263,523 |
| 7 | CCC | 1,000,000 | 2 | 1,127,628 |
| 8 | A | 10,000,000 | 8 | 14,229,071 |
| 9 | BB | 5,000,000 | 2 | 5,386,603 |
| 10 | A | 3,000,000 | 2 | 3,181,246 |
| 11 | A | 1,000,000 | 4 | 1,181,246 |
| 12 | A | 2,000,000 | 5 | 2,483,322 |
| 13 | B | 600,000 | 3 | 705,409 |
| 14 | B | 1,000,000 | 2 | 1,087,841 |
| 15 | B | 3,000,000 | 2 | 3,263,523 |
| 16 | B | 2,000,000 | 4 | 2,527,046 |
| 17 | BBB | 1,000,000 | 6 | 1,315,720 |
| 18 | BBB | 8,000,000 | 5 | 10,020,611 |
| 19 | BBB | 1,000,000 | 3 | 1,118,178 |
| 20 | AA | 5,000,000 | 5 | 6,181,784 |

이렇게 다루고 있다고 해 보자. 그 경우 각각의 상태가 8개 이므로, 이의 총 연산 횟수는 $8^{20}$=1E18 이 된다. 이걸 다 할 수가 없다.



따라서 어떻게 simulation을 하느냐? 아래와 같은 방법들이 있다.

1. **Generate scenarios.** Each scenario corresponds to a possible "state of the world" at the end of our risk horizon. For our purposes, the "state of the world" is just the credit rating of each of the obligors in our portfolio.
2. **Value portfolio**. For each scenario, we revalue the portfolio to reflect the new credit ratings. This step gives us a large number of possible future portfolio values.
3. **Summarize results**. Given the value scenarios generated in the previous steps, we have an estimate for the distribution of portfolio values. We may then choose to report any number of descriptive statistics for this distribution.

이 순서로 한다. 그런데 correlation이 존재하는데, 이걸 어떻게 고려하여 simulation 하는가? 이에 대한 방법이 아래에 있다.

## C) Cholesky Factorization [중요-시험문제]

서로 correlated 된 random variable을 만들 수 있도록 하여 주는 것이 바로 Cholesky Factorization 이다.

Cholesky Factorization이란, 주어진 Matrix를 2개의 matrix의 곱으로 나누는 것이다. 이렇게 쪼개는 방법에는 여러가지 방법이 있는데, 그 중의 하나가 Cholesky factorization이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

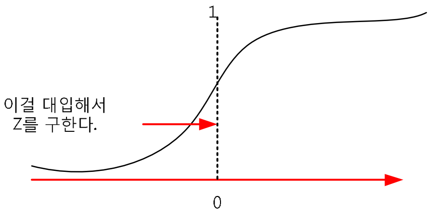
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2 \end{pmatrix}$$

대부분의 컴퓨터 언어는 난수를 만들어 줄 수 있다. 그리고 그 가장 기본적

인 형태는 (0, 1)이다. 우리가 simulation 하기 위해서는 이 난수를 다룰 수 있어야 한다.

예를 들어 1번 form은 BBB이기 때문에 각각의 부도의 확률에 대해 알고 있다. 이 때 표준 정규분포로부터 random number를 뽑았는데, 그게 3.54보다 높은 숫자라면 AAA가 된다, 그런 식이다.

그런데 그냥 random var로 어떻게 정규분포의 숫자로 구하는가? 우선 정규분포의 CDF(누적확률분포)를 보면 이런 식으로 생겼다.




즉 CDF에서부터 거꾸로 뽑아내는 것이다. 여기에는 norminv() 함수가 쓰이며, 아래와 같은 형태로 시뮬레이션 하면 된다.

| rou | Z1 | Z2 | Cor-Z1 | Cor-Z2 |
|---|---|---|---|---|
| 0.3 | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B2 | =rou*B2+SQRT(1-rou^2)*C2 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B3 | =rou*B3+SQRT(1-rou^2)*C3 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B4 | =rou*B4+SQRT(1-rou^2)*C4 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B5 | =rou*B5+SQRT(1-rou^2)*C5 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B6 | =rou*B6+SQRT(1-rou^2)*C6 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B7 | =rou*B7+SQRT(1-rou^2)*C7 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B8 | =rou*B8+SQRT(1-rou^2)*C8 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B9 | =rou*B9+SQRT(1-rou^2)*C9 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B10 | =rou*B10+SQRT(1-rou^2)*C10 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B11 | =rou*B11+SQRT(1-rou^2)*C11 |
| | =NORMINV(RAND(),0,1) | =NORMINV(RAND(),0,1) | =B12 | =rou*B12+SQRT(1-rou^2)*C12 |

이렇게 해서 새로이 구한 Z1과 Z2의 상관 계수는 ρ 값과 거의 일치하게 된다. 이것이 서로 상관계수가 있는 random variable을 만들어 주는 방법이다.

시나리오 제네레이션이란 이런 식으로 random var를 이용해서 Simulation을 하여 random number들을 만들고 normsinv를 써서 계산하는 것이다.



*Table 10.4*
**Scenarios for standardized asset returns**

| Scenario | Firm 1 | Firm 2 | Firm 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | -0.7769 | -0.8750 | -0.6874 |
| 2 | -2.1060 | -2.0646 | 0.2996 |
| 3 | -0.9276 | 0.0606 | 2.7068 |
| 4 | 0.6454 | -0.1532 | -1.1510 |
| 5 | 0.4690 | -0.5639 | 0.2832 |
| 6 | -0.1252 | -0.5570 | -1.9479 |
| 7 | 0.6994 | 1.5191 | -1.6503 |
| 8 | 1.1778 | -0.6342 | -1.7759 |
| 9 | 1.8480 | 2.1202 | 1.1631 |
| 10 | 0.0249 | -0.4642 | 0.3533 |

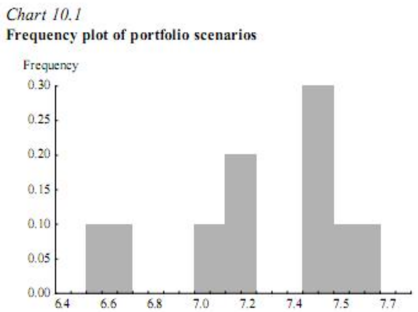
이걸 비교해 보면,

*Table 10.5*
**Mapping return scenarios to rating scenarios**

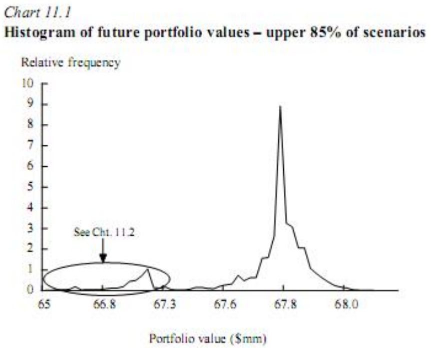
| | Asset Return | | | New Rating | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Scenario | Firm 1 | Firm 2 | Firm 3 | Firm 1 | Firm 2 | Firm 3 |
| 1 | -0.7769 | -0.8750 | -0.6874 | BBB | A | CCC |
| 2 | -2.1060 | -2.0646 | 0.2996 | BB | BBB | CCC |
| 3 | -0.9276 | 0.0606 | 2.7068 | BBB | A | A |
| 4 | 0.6454 | -0.1532 | -1.1510 | BBB | A | Default |
| 5 | 0.4690 | -0.5639 | 0.2832 | BBB | A | CCC |
| 6 | -0.1252 | -0.5570 | -1.9479 | BBB | A | Default |
| 7 | 0.6994 | 1.5191 | -1.6503 | BBB | A | Default |
| 8 | 1.1778 | -0.6342 | -1.7759 | BBB | A | Default |
| 9 | 1.8480 | 2.1202 | 1.1631 | A | AA | B |
| 10 | 0.0249 | -0.4642 | 0.3533 | BBB | A | CCC |

이런 식으로 뽑혀 나오게 된다. 이걸 통해서 여러가지 가능 조합들이 죽 나오게 된다.

아래는 위에서 돌려본 10번의 시나리오를 통해 이 포트폴리오의 가치가 얼마가 되는지를 알고 있는 것이다. 그 가치를 가지고 누적으로 그림을 죽 그려주면 된다.




시나리오를 10번만 수행하면 이렇게 나오지만, 만 번, 이만번을 구하면,




이런 식으로 나오게 된다.

## 6. Merton's Model (revisited) [Chapter 20:page 498-500]

$$p_i(y) = P[R_i < C_i]$$

$$R_i = v_{i0}\epsilon_i - \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}$$

$$p_i(y) = P\left[e_i < \frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right] = \Phi\left(\frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right)$$

- p: Probability of default
- R: Rate of Return
- C: Threshold
- ε: Idiosyncratic risk
- Y: Systemic risks
- v: weights

이렇게 모델이 주어져 있다고 할 때, 수익율 $R_i$는 어떤 숫자를 가질까? Y도 Normal이고 $E_i$도 Normal이니까 $R_i$도 Normal distribution 이 된다. 그리고 평균은 0이고 분산은 1이 된다. N(0, 1)

즉 BIS 사람들은 수익율이 **체계적 위험(Systematic risk)의 위험 + 비체계적 위험(Unsystematic risk)의 위험**을 받는다고 본 것이다. 이걸 이용하면 뭘 구할 수 있냐? 부도의 확률이라는 것을 구할 수 있다.

$R_i(y)$ 가 주어졌을 때, 즉 경기가 99% 수준일 때, 어떤 숫자를 주었을 때의 부도 확률이 얼마인가를 계산할 수 있어야 한다. 이는

$$R_i(y) = P\left[e_i \leq \frac{C_i - \rho y_\alpha}{\sqrt{(1-\rho^2)}}\right]$$

와 같다. 즉 부도 확률을 이렇게 쓸 수 있다.(이게 어떻게 유도되었는지는 조금 후에 보도록 하자) 그런데 $e_i$가 표준 정규 분포를 하니까, 이걸 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$= \Phi\left[\frac{C_i - \rho y_\alpha}{\sqrt{(1-y^2)}}\right]$$

그런데

$$P_i(y) = R[R_i \leqq C_i] = \Phi(C_i) = PD$$

$$C_i = \Phi^{-1}(PD)$$

로 볼 수 있다. 이를 위 식의 $C_i$에 다시 대입하면,

$$= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \rho y_a}{\sqrt{(1-p^2)}}\right)$$

이 된다. 그 식이 IRB 식의 가운데쪽 형태와 같다.

$$BRWC = 976.5 \times \Phi[1.118 \times \Phi^{-1}(PD) + 1.288] \times \left(1 + \frac{0.0470 \times (1-PD)}{PD^{0.44}}\right)$$

여하튼 위의 가운데에 rho = 0.2 를 넣고 구하면, 1.118, 1.288 이런 숫자가 나옴을 알 수 있다.

- **Asymmetric single risk factor model (ASRF)**

즉 systematic factor가 1개밖에 없는 것을 말한다. 그런데 사실 원래 논문에서는 K개 존재하도록 되어있다.

$$p_i(y) = P\left[e_i < \frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right] = \Phi\left(\frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right)$$



$$p_i(y) = P\left[e_i < \frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right] = \Phi\left(\frac{C_i + \sum_{k=1}^{K} Y_k v_{ik}}{v_{i0}}\right)$$

그런데 BIS 사람들은 이렇게 너무 많으면 안되니까 바꾼 것이다.

- **L = Loss rate**

$$L_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} LGD_i EAD_i}{\sum_{i=1}^{n} EAD_i}$$

$$EL_\infty = E(LGD) \times PD$$

$$VaR_\infty = E(LGD)\, p(y_q)$$

- **Assuming only one systemic risk**

$$p(y_q) = \Phi\left(\frac{C + y_q\sqrt{r}}{\sqrt{1-r}}\right) = \Phi\left[\sqrt{\frac{1}{1-r}}\Phi^{-1}(p) + \Phi^{-1}(q)\sqrt{\frac{r}{1-r}}\right]$$

즉 이는 수익율이 아래와 같은 모습을 따른다고 가정한 것이다.

$$R_i = \sqrt{p}\, Y + \sqrt{(1-\rho)}\, \epsilon_i$$

그런데 이렇게 놓고 보면 이것이 CAPM 모형과 유사함을 알 수 있다.

이런 상태에서 부도를 어떻게 정의했는가? 수익율이 얼마 이하로 떨어지면 부도라고 정의한 것이다. 여기에서 우리가 찾고자 하는 것은 conditional

PD 를 찾으려고 하는 것이다. 여기에서의 condition은 경기 조건에다 PD를 주는 것이다. 그리고 이 PD는 PD = Phi($C_i$) 를 통해서 구할 수 있었다. 즉 Threshold 보다 작으면 부도다, 이렇게 했는데 이 때 과거로부터 관측해온 평균값에서 뽑아온 PD를 이용하였다. 예를 들어서 100년 동안 AAA 기업이 부도날 확률이 어떻게 되었냐를 통해서 구한 것이다.

- **부도율 조건 유도 [Chapter 20:page 498-500]**

경기가 아주 나쁘면 부도가 언제까지 올라가느냐를 식으로 표현하고 싶다고 하자. 즉 경기를 나타내는 지표를 정규 분포에서 아주 끝에 있는 값으로 대치를 시켜 버리면, $R_i$ 식이 아래와 같이 표현될 수 있다.

(경기가 아주 나쁘다는 조건)

$$P(R_i = \sqrt{p}\, Y_a + \sqrt{(1-\rho)}\, \epsilon_i < C_i)$$

즉 $R_i$가 $C_i$ 보다 작으면 부도가 난다고 정의하고, 이 확률이 얼마인가를 계산하는 것이다.

이걸 $e_i$에 대한 식으로 옮겨 보면

$$P\left(e_i \leq \frac{C_i - \sqrt{\rho}\, y_\alpha}{\sqrt{1-\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}\, y_\alpha}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

이렇게 유도됨을 알 수 있다.

BIS에서는 이렇게 제시한 것이다. 사실 말이야 쉽지만, 자기 자본의 비율에 따라서 천억, 이천억이 걸린 문제이다. 그걸 BIS에서는 그냥 일괄적으로 0.2 라고 이야기한 것이다. 그리고 왜 0.2인지는 이야기를 안 한다.

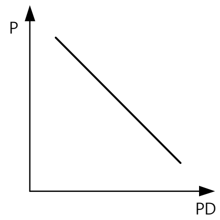


BIS에서는 이걸 각국 중앙 은행에 이 식을 보내서 실제로 한 번 구해보라고 했다. 이걸 QIS라고 부른다.

그럼 현재 가지고 있는 자산을 기준으로 숫자를 넣어서 필요한 자기 자본의 양이 얼마인지를 보고한다. 이런 과정을 5번을 반복을 했는데, 문제는 뭐냐? 0.2가 너무 높다고 각국에서 불평을 터트린 것이다.

만약 p=0이면 어떻게 될까? 그 경우 다 없어지고 그냥 PD만 남는다. 따라서 경기가 안 좋을 때 부도율은 그냥 PD(현 경기 상황) 가 나온다.

그래서 BIS 사람들이 숫자를 바꿨다. 0.12~0.24 로 바꿨다. 그리고 이거에 대한 식을 만들어서 또 보내줬다. 그런데 그 식에 조금 문제가 있다.




예를 들어서 부도율이 낮은 삼성 등과 같은 기업이 있다고 해 보자. 이런 기업들은 경기가 나빠졌다고 부도율에 영향을 받지 않는다. 반면 작은 중소기업들은 경기가 나빠지면 부도율이 그만큼 높아질 것이다. 즉 우상향 그래프 형태가 된다. 그런데 BIS에서 보내준 모양을 보면 우하향 형태가 된다. 즉 좋은 기업은 Rho가 높고, 나쁜 기업은 Rho 가 낮은 형태이다. 즉 BIS에서 인위적으로 이렇게 조정한 것이다.

즉 왼쪽은 좋은 기업인데, Rho를 작게 만들면 좋은 기업에 빌려줬을 때 쌓이는 자기자본의 비율이 적어진다. 즉 좋은 기업에는 돈을 많이 빌려준다. 그런데 등급이 나쁜 기업들 한테 Rho를 크게 해 버리면 상대적으로 많은 자기자본이 쌓이게 된다. 따라서 돈을 안 빌려주게 된다. 따라서 그걸 정책적으로 방지하려고 좋은 기업에 Rho를 높게 쌓고 나쁜 기업에 Rho를 낮게 쌓아주는 것이다.

많은 사람들이 위를 대입해서 실제로 해 보니까 잘 안 맞는다. 그런데 바꿀 수는 없다. 이미 시행하기로 했기 때문이다.

# 금융공학15 - Stress Test (optional)

2007년 5월 24일 목요일
오후 5:02

- **스트레스 테스트**

인터넷에서 Stress test에 대한 문서를 검색하면 전형적인 몇 개의 문서밖에 나오지 않는다. 특히나 Credit에 대한 stress test는 참 구하기 어렵다.

아래 문제는 Basel II에서 나온 글이다. 그런데 바젤 문서 답지 않게 9개 밖에 안 된다. Note이기 때문이다.

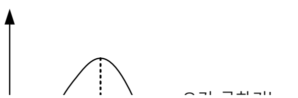
이 중 Technical appendix 부분을 보면, ASRF를 이용하여 구하는 장면이 나온다. 이 Basel requirement가 결국 원하는 것은 무엇이냐? E(L|X)를 찾겠다는 것이다. L은 손실인데, 조건부 기대값이다. 즉 경기 상황이 안 좋을 때의 손실의 기대값을 구하자는 것이다.

만약 우리가 손실의 분포라는 것을 완벽하게 알고 있다면 문제가 되지 않을지도 모른다. 하지만 실제로는 그렇지 않다. 특히 credit에 의한 손실 분포는 절대 정규 분포가 아니며, 굉장히 asymmetric한 분포라는 것이 알려져 있다.(leuptokertic distribution) 따라서 CreditMetrics는 시뮬레이션 방법 및 자기들만의 logic을 적용하여 이를 추정하는 것이다.

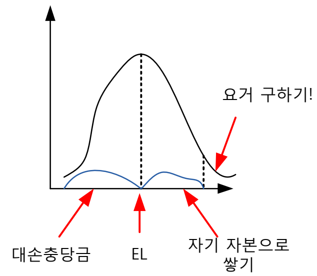
그 분포가 어떤 분포인지 모르는데 뭘 계산할 수 있는가? $E_L$을 계산할 수 있을 것이다. 우선은 EAD = 1이라고 가정하자. (주어진 상수로 생각함) 쉽게 말하면 1억원을 빌려줬다는 것이다.

그런데 평균 부도율이 10%인 것을 안다. 이 때 LGD = 40%라면 어떻게 될까? $E_L$ = PD x LGD 가 된다.

그런데 바젤이 원하는 것은 $E_L$이 아니라 Value at Risk에 해당하는 값, unexpected loss를 포함한 값을 계산해 보자는 것이다.








초창기의 바젤 식은 자기 자본으로 손실금액을 쭉 다 쌓으라고 한 것이다.(p=0.2) 그러자 세계 각국은 그렇게 못한다는 것이다. 그러자 생각을 바꾼 것이 EL만큼은 대손충당금으로 쌓으라는 것이다.

근데 우리는 이게 어떤 distribution이 될지를 모른다. 이 문제를 해결하는 다른 식의 방법이 무엇인가? X라고 하는 systematic risk를 생각을 하는 것이다. 앞에서 보는 것은 unconditional risk 이다. 경기가 안 좋으면 손실이 많이 나고, 좋으면 적게 날 것이다. 그리고 경기가 안 좋은 상태에서 expected value를 구하는 것이다. 이를 E(L|x=a) 로 구할 수 있다.

**<설명 추가: 주절 주절 무슨 말이 있었는데 잘 모르겠음>**

$U_L E_L (=U_L + E_L) = E[L|X=a]$ (a=99.9)

로 정의하자. 이 때 indicator variable 을 더 넣자. 그럼 어떻게 쓸 수 있느냐?

$$E[L|X=a] = E[L|D=1, X=a] \times P[D=1|X=a] + E[L|D=0, X=a]P[D=0|x=a]$$

1. 경기가 안 좋을 때 누군가 부도가 났을 때의 expected loss
2. 경기가 안 좋을 때 부도의 확률
3. 경기가 안 좋은데 부도가 안 났을 때의 expected loss
4. 경기 안 좋을 때 부도 안 날 확률

그런데 2. 경기가 안 좋은데 부도 날 확률이 아래와 같다.

$$CPD = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\cdot\Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

이제 1. 은 어떻게 구할까? Loss given default, 즉 경기가 안 좋을 때의 $E_L$을 구하면, CLGD로 구한다. 이를 경제학적 용어로 Downturn LGD(경기침체시 기대 손실) 라고 한다. 즉 이는 각 은행이 자신들의 경험에 의지해서 잘 적어서 써내라고 한 것이다.

UL·EL = CPD × CLGD

문제는 여기부터다. 우리나라의 경우에는 부도의 데이터가 없다. 6개 밖에 없다. 그런데 손실율을 구해라? 이건 아예 자료가 없다. 그래서 이걸 최근에 새롭게 만들기 시작했는데, 문제가 많다. 사실 부도는 쉽다. 특정한 때 누가 부도가 났는지 안 났는지 알 수가 있다. 근데 손실율(LGD)은 일단 누가 부도가 난 다음부터 부도 차주를 계속 관측해야 한다. 10억 빌려주고 부도났다. 그럼 계속 채권 추심해서 돈 받는걸 관측해야 한다. 문제는 지금이 2007년인데, LGD 데이터는 2005년 밖에 없다. 즉 2005년 부도가 난 사람을 아직 쫓아다니는 중이라는 이야기이다.

그래서 이거까지 고려하면 2000-2004까지 데이터 포인트가 5개 밖에 없다. 그런데 이거 보고 Downturn LGD를 계산해야 하는 것이다.

가장 쉽게 드는 생각이라면 이 5개 중에서 가장 나쁜거 고르면 되지 않을까 하고 생각할 수 있다. 그런데 이렇게 5개 고른다고 해도 우리나라가 별로 경기가 나빴던 시기가 없었다.

<교수님 논문: Stress Test>

경기 상황이 안 좋은 상황을 스스로 만들어 내어서 분석하는 방법이 있을 수 있다. 이 때 부도율 PD = f(X1, ... Xn) 즉 이를 경기 변수들로 모델링 하는 것이다. 데이터가 좀 적기는 하지만, 그거 가지고 경기 상황으로 분석을 하는 것이다. 이 부도율을 분기 단위 부도율로 사용하게 되면 데이터를 많이 쓸 수 있을 것이다. 이런 계수들을 기본적으로 regression을 하는데, 왜



냐하면 PD도 0~1 사이의 숫자이기 때문이다. 여하튼 여러가지 변환을 해줘서 regression을 해 준 다음에 실제 거시경제 변수에 대해서 stress를 가해보는 것이다. 만약 나쁜 상황을 주면 부도율이 높아질텐데, 이게 CPD 보다 나쁘게 나오면 추가적인 자기 자본이 나오는 것이다. 즉 이론적으로 예측한 부도율보다 실증적으로 나오는 것이 더 크다면 그만큼의 자기 자본을 더 쌓아 주어야 하는 것이다.

그런데 실제로 이거 돌려보니 다행히 이론치보다 작더라, 하는 내용이었다.

한국은행에 BOK라는 것이 있다.

"한국은행의 분기 계량 경제 모형의 구축"

계량경제 배워서 한국은행 들어가면 이런거 한다. 한국은행이 사용하는 계량 모형을 만들고, ... 이런 식이다. 2004년 말까지 만들어진 모형이 BOK 04 이다. 보통 5년 주기로 만든다.

(이하 내용 생략!) 셤에 안 나와!

# 금융공학16 - BDT

2007년 5월 29일 화요일
오후 1:06

- **BDT 모형**

  **One factor model of interest rates and its application to treasury bond options**

  금리에 관한 모형은 하나의 모형만 있는 것이 아니다. Binomial 형태로 나타내든지, 뭐 그런 식으로 여러가지가 있을 수 있다. 금리를 그리는 종류의 모형은 여러가지가 있는데, 그 중 뭐가 다른 것보다 뛰어나다 하는 것은 별로 없다.

  그럼에도 불구하고 이 BDT 모형은 실제적으로 많이 사용된다. 이 모델은 다음과 같은 특성을 가진다.

  1. Its fundamental variable is the short rate— the annualized one-period interest rate. The short rate is the one factor of the model; its changes drive all security prices.
  2. The model takes as inputs an array of long rates (yields on zero-coupon Treasury bonds) for various maturities and an array of yield volatilities for the same bonds. We call the first array the yield curve and the second the volatility curve. Together these curves form the term structure.
  3. The model varies an array of means and an array of volatilties for the future short rate to match the inputs. As the future volatility changes, the future mean reversion changes.

  - Short rate : 하나의 Binomial 단위에 적용되는 금리.
  - Long rate : 여러 Binomial 단위, 즉 2년짜리, 5년짜리 등에 적용되는 금리.



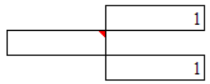
또한 각 금리들의 변동성을 알아야 한다. 따라서 다음과 같이 데이터가 주어져 있다고 해 보자. (BDT 논문에 나온 데이터를 그대로 쓴 것임)

**Sample Term Structure**

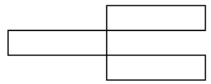
| Maturity | Yield | Yield Vol | Price |
|---|---|---|---|
| 1 | 10.0% | 20% | |
| 2 | 11.0% | 19% | |
| 3 | 12.0% | 18% | |
| 4 | 12.5% | 17% | |
| 5 | 13.0% | 16% | |

*Finding the initial short rate using a one-year zero*

Price Tree




Rate Tree



1. 이를 위해서 초기 Short rate(연간 1 Binomial 단위의 금리)를 구하도록 한다.

   이를 구하기 위해서는 채권 금리의 변동성을 구할 필요가 있다. 이때 변동성이란 다른 말로는 표준 편차를 의미한다. 위의 테이블을 보면, 1년 짜리 금리는 금리 자체로는 10%인데 과거의 데이터 변동성을 보니까 20%였다는 이야기이다. (즉 표준 편차가 0.2라는 이야기)

2. 또한 내가 만든 모형 자체가 주어진 input 변수들을 다 설명할 수 있어야 한다. Input 변수로는 같은 채권에 대해 다양한 만기를 갖춘 long rate(zero-coupon Treasury bond의 yield)와, 이에 대한 yield volatility의 목록이 된다. 첫번째를 "Yield Curve"의 배열, 두번째를 "Volatility curve"의 배열이라고 하자. 이 두 가지 커브가 Term Structure를 구성한다.

   실제로 이를 구할 때 Lognormal 분포를 사용하여 구하도록 하자.

   논문을 보면 Short rates at any times are lognormally distributed이란 말

이 있다. 이는 모델링하고자 하는 금리 자체는 로그 분포를 따른다는 것이다. 이 때 금리가 '-'가 안 되도록 만들어야 한다. 왜냐하면 lognormal 분포에는 음수가 없기 때문이다.

주가의 움직임을 그릴 때 $S_0$로부터  시작했다. 이 때 현재 시점의 가격은 어떻게 되겠는가? 주가는 모두 0-coupon bond라고 생각할 수 있다. 이 때 이의 현재시점에서의 가격을 구하면 아래와 같다.

**Sample Term Structure**

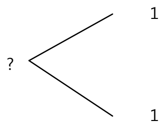
| Maturity | Yield | Yield Vol | Price |
|---|---|---|---|
| 1 | 10.0% | 20% | 0.9091 |
| 2 | 11.0% | 19% | 0.8116 |
| 3 | 12.0% | 18% | 0.7118 |
| 4 | 12.5% | 17% | 0.6243 |
| 5 | 13.0% | 16% | 0.5428 |

즉 M=2를 수식으로 나타내면 $1 / (1+0.11)^2=0.8116$ 이 되는 것이다. 요건 3년, 4년, 5년짜리들도 다 이런 식으로 구해주면 된다.

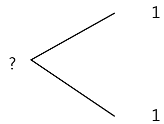
이렇게 생각하면 된다. 만기 시점 5년째에 1을 주는 채권인데, 가격이 하필이면 0.5428인 것이다. 그걸 보고 만기가 5년짜리 0-rate이 13%라고 거꾸로 계산을 하는 것이다.

즉 실제 세상에서 채권의 가격을 먼저 알아내고 그것을 이용해서 역으로 금리를 계산해 낸다. 이 때 첫 단계에서는 무엇을 할까? 만기 1년짜리 채권을 써 두는 것이다. 그리고 이 만기 1년짜리 채권은 금리가 이런 이런 식으로 움직일 거라고 써 두는 것이다. 또한 이것은 현재의 state를 나타내기도 한다. 그래서 1년이 지나면 2가지 state 중 하나가 될 것이라고 보는 것이다.

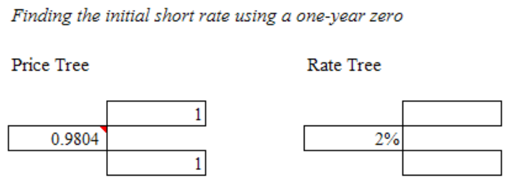
그렇다면, 예를 들어 만기 1년짜리 0-coupon bond를 가지고 있을 때 경기가 좋아지면 어떻게 되는겠는가? 답은 1이다. 채권은 Down state가 되어도 여전히 1이다! 경기가 up이건 down이건 채권의 "가격"은 항상 1, 1이다.





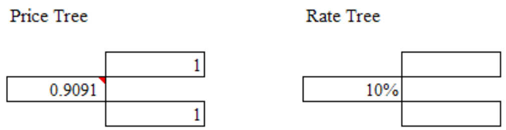

그리고 이 사람들은 문제를 쉽게 하기 위해서 risk-neutral probability를 1/2라고 가정하였다. 그리고 price tree를 보면, up이 되어도 1이고 down이 되어도 1이므로 이의 현재 시점에서의 가격을 구할 수 있다. 즉 위와 아래를 그냥 평균내어서 금리만큼 Discount 시켜주면 된다. 따라서 금리가 2%인 경우에는




$$0.9804 = \frac{average}{df} = \frac{(\frac{1+1}{2})}{1+0.02}$$

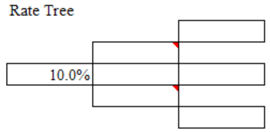
와 같이 나온다. 즉 평균 내어서 Rate Tree의 퍼센트 만큼 discount 시켜주면 된다.

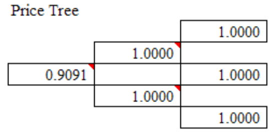
자, 이제 이론 가격을 현실에서 거래되는 가격으로 강제로 맞춰질 수 있는 금액을 적어 주어야 한다. 그게 몇 %인가? 10%이다. 따라서 아래와 같다.




그래서 금리 트리의 처음에 들어가는 숫자는 10%가 되는 것이다. 이렇게

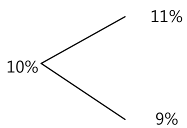
만기 1년짜리 채권 Rate Tree의 첫 숫자를 구해냈다. 이제 한 스텝 더 나아가 보자. 이게 up이 되면 얼마가 되고 down이 되면 얼마가 되는지를 결정해 보도록 한다. 만기 2년짜리 채권을 사용하도록 하자.

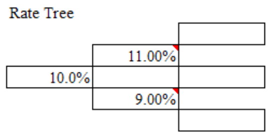


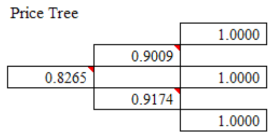




맨 끝에는 이런 식으로 항상 1을 주어야 한다. 그것이 Zero-coupon bond의 특성이다. 그렇다면 중간 중간에 있는 Price Tree의 값들은 어떻게 구하나? 그 시점에 세상에 적용될 금리를 적용해서 구해야 한다. 이는 Rate Tree에서 적혀진 값을 이용하여 구해야 한다.

나머지는 숫자들을 잘 챙겨주면 된다. 예를 들어 아래를 따르도록 한다고 해 보고 구해보자.




이렇게 넣고 나서 가격을 구했더니 0.8265이 나왔다. 그런데 실제 세상에서는 0.8116에 거래되고 있다는 것이다. 무엇이 잘못일까? 바로 아무 생각 없이 금리 11%, 9%를 넣었기 때문이다. 즉 0.8265가 아니라 0.8116으로 나오게 만드는 두 숫자를 거꾸로 찾아주어야 한다.

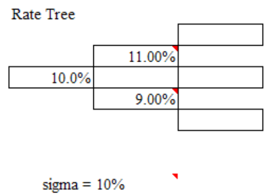
그런데 문제가 있다. 2개 숫자를 결정해야 하는데, 내가 가지고 있는 것은 Price Tree에 있는 식 하나밖에 없다. 우선 이를 식으로 써 보자. 그러면,

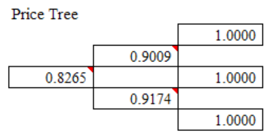


$$\frac{\dfrac{1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}{(1+ru)}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}{(1+rd)}\times\dfrac{1}{2}}{(1+0.1)}=0.8116$$

이 식을 만족하는 ru와 rd를 구하면 된다. 또한 이것만 가지고는 식이 풀리지 않는다. 따라서 하나의 조건이 더 필요한데, 그것이 바로 변동성(volatility)이다. 이 논문에서는 이를 계산하기 위하여 아래와 같이 변동성 Sigma를 구한다.

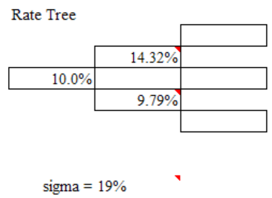
$$0.5\times\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right)$$

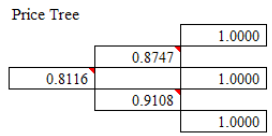



이렇게 구해보면 변동성도 19%가 나와야 하는데 10%가 나왔음을 알 수 있다. 즉 Price 및 변동성 둘 다 틀린 것이다.

이 경우 Sigma 식이 함께 주어지기 때문에 $r_u$, $r_d$를 계산할 수 있다. 여기에 14.32%, 9.79%를 넣으면 아래와 같이 기대하는 결과를 뽑아낼 수 있다.



즉 이렇게 구했더니 기대하는 대로 답이 나왔음을 알 수 있다. 이 해는 Trial & Error 법으로 보통 찾는다.

자, 위의 엑셀에서 Sigma를 구하는 식을 보자. 그러면

$$0.5 \times \ln(\frac{r_u}{r_d})$$

이렇게 되어 있다.

보통 분산 식을 쓰라고 하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

이렇게 된다. 그런데 n이 크면 이렇게 구해도 되긴 된다.

$$\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

2개의 개수가 주어졌을 때 어떻게 되는지 풀어서 써 보자.

$$\frac{(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2})^2 + (x_2 - \frac{x_1+x_2}{2})^2}{2} = \frac{(\frac{x_1-x_2}{2})^2 + (\frac{x_2-x_1}{2})}{2} = (\frac{x_1-x_2}{2})^2$$

그런데 이거랑

$$0.5 \times \ln(\frac{r_u}{r_d})$$

를 보면 유사성을 발견할 수 있다.

Lognormal 분포는 log를 취해버리면 normal distribution이 나온다. 그래서 사실 log 상태에서보다는 normal 상태에서 분포 구하는 것이 좋다. 이를 이용해 보도록 하자. 그러면 2개일 때 분산은 아래와 같다.

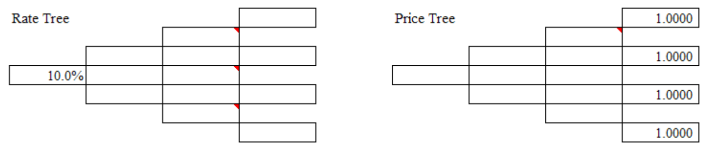


$$(\frac{x_1-x_2}{2})^2$$

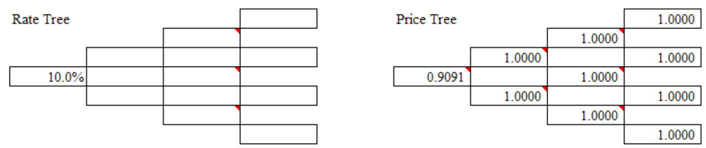
$$\sigma = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{\ln r_u - \ln r_d}{2} = \frac{1}{2}(\ln\frac{r_u}{r_d})$$

이거랑 놓고 보면 data 가 2개일 때 표준편차 구하는 공식이랑 똑같음을 알 수 있다.

자 이제 Rate Tree의 3번째 칸들을 채워보자. 위와 같이 Price Tree의 제일 끝은 1이 된다.




이제 Price Tree를 이제 한 칸씩 앞으로 가져와야 한다. 뒤의 것을 평균 해서 Rate Tree의 해당 셀만큼 Discount 시켜주면 된다.

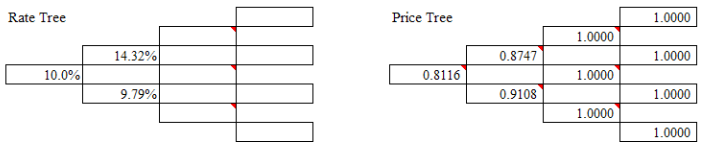



이렇게 셋업된다. 각 셀들은

$$r_n = \frac{r_{nd} + r_{nu}}{2} \frac{1}{df_n}$$

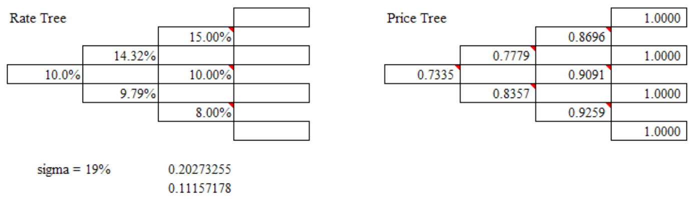
이렇게 세팅하면 된다.

그리고 아까 구한 수치들을 Rate Tree에 대입하면




자 이제 빈 칸을 잘 구해주어서 원하는 값이 나오도록 해야 한다.

아무 숫자나 넣었다고 해 보자. 아래와 같이 다 망가진다.




근데 문제가 생긴다. 식은 2개인데 변수는 3개이다.

아래쪽 변동성을 보면, 의도적으로 2개씩 선택해서 Sigma 구하는 식을 2개 짰다. 제일 위쪽 부터 셀 숫자를 $r_{uu}$, $r_{ud}$, $r_{dd}$라고 할 때, 이걸 통해서 가격과 변동성 모두를 맞춰야 한다.

따라서 $r_{uu}$와 $r_{ud}$로 인한 변동성과 $r_{ud}$와 $r_{dd}$로 인한 변동성이 같다고 가정하면 식도 3개가 되어 이를 구할 수 있게 된다. 식으로 나타내면,

$$0.5 \times \ln\left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}}\right) = 0.5 \times \ln\left(\frac{r_{ud}}{r_{dd}}\right)$$

이걸 계산하면

$$r_{ud}^2 = r_{uu} \times r_{dd}$$

$$r_{ud} = \sqrt{r_{uu} r_{dd}}$$



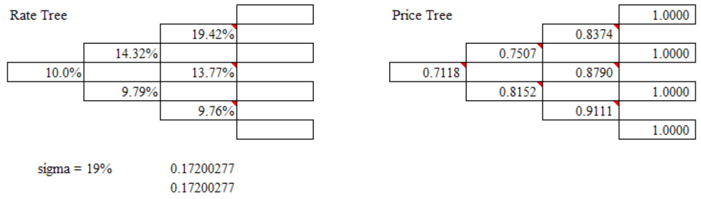
이렇게 된다.

즉 가운데 셀을

setup:
=SQRT(E15*E19)

로 세팅하면 된다.

그리고 이를 Trial & Error를 통해서 구하면,




즉 원래 구한대로 0.7118이 나오게 된다!!

그런데 문제는 Volatility가 0.17이 나와서 18%가 아니게 된다.

**Sample Term Structure**

| Maturity | Yield | Yield Vol | Price |
|---|---|---|---|
| 1 | 10.0% | 20% | 0.9091 |
| 2 | 11.0% | 19% | 0.8116 |
| 3 | 12.0% | 18% | 0.7118 |
| 4 | 12.5% | 17% | 0.6243 |
| 5 | 13.0% | 16% | 0.5428 |

즉 3년째에는 18%가 되어야 하는데, 맞지가 않는 것이다. 뭐가 틀린 것일까? ... (답 없음)

- **Treasury Bond**

이는 1년에 1번씩 Coupon을 주는 경우이다. 그림으로 그려보면 아래와 같다.

## ○ Rate Tree

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 25.53% |
| | | | 21.79% | |
| | | 19.42% | | 19.48% |
| | 14.32% | | 16.06% | |
| 10% | | 13.77% | | 14.86% |
| | 9.79% | | 11.83% | |
| | | 9.76% | | 11.34% |
| | | | 8.72% | |
| | | | | 8.65% |

## ○ Price Tree

**① One-year Zero**

| | |
|---|---|
| | 10 |
| 9.090909 | |
| | 10 |

**③ Three-year Zero**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 110 |
| | | 92.11187 | |
| | 82.57443 | | 110 |
| 78.29449 | | 96.6863 | |
| | 89.67345 | | 110 |
| | | 100.2187 | |
| | | | 110 |

**② Two-year Zero**

| | | |
|---|---|---|
| | | 10 |
| | 8.747376 | |
| 8.116215 | | 10 |
| | 9.108298 | |
| | | 10 |

**PV of P/F (①+②+③)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 110 |
| | | 102.1119 | |
| | 101.3218 | | 110 |
| 95.50161 | | 106.6863 | |
| | 108.7817 | | 110 |
| | | 110.2187 | |
| | | | 110 |

즉 3개의 Zero-coupon bond를 합한 포트폴리오의 현가(PV)는 3년짜리 T-bond의 현가와 같아야 한다. 아래는 실제로 이를 구한 계산 결과이다.

**PV (포트폴리오)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 110 |
| | | 102.11 | |
| | 101.33 | | 110 |
| 95.51 | | 106.69 | |
| | 108.79 | | 110 |
| | | 110.22 | |
| | | | 110 |

**Price (T-bond)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 100 |
| | | 92.11 | |
| | 91.33 | | 100 |
| 95.51 | | 96.69 | |
| | 98.79 | | 100 |
| | | 100.22 | |
| | | | 100 |

즉 두개의 현재시점 가격이 모두 같음을 알 수 있다.

자, 이제 위의 기초자산에 대한 콜옵션을 행사하고자 할 때 이의 가격을 책



정해 보고자 한다.

We want to value options on this security—a two-year European call and a two-year European put, both struck at $95.

행사 가격이 95인 만기 2년짜리 콜옵션의 가격은 얼마가 되어야 하는가? 만기가 2년이기 때문에 {92.11, 96.69, 100.22} 시점에서 행사를 할 것이다. 그런데 행사 가격이 95이기 때문에 92.11을 95를 주고 살 이유는 없다. 따라서 92.11 의 경우에는 콜옵션 가격이 0이 되어 버린다. 즉 Payoff는 아래와 같이 결정된다.

Two-year European Call at 95

| | | |
|---|---|---|
| | | =MAX(0,J18-95) |
| | 0.739153 | |
| 1.766395 | | 1.69 |
| | 3.146917 | |
| | | 5.22 |

| | | |
|---|---|---|
| | | 0 |
| | 0.739153 | |
| 1.766395 | | 1.69 |
| | 3.146917 | |
| | | 5.22 |

각각의 노드는 전단계로 갈 때마다 디스카운트를 시켜주며, 각 노드로 쪼개질 확률은 1/2 임을 가정하고 구하였을 때 위와 같은 Payoff Tree를 구할 수 있는 것이다.

**Two-year European Call at K=95**

| | | |
|---|---|---|
| | | 0 |
| | 0.739153 | |
| 1.766395 | | 1.69 |
| | 3.146917 | |
| | | 5.22 |

Two-year European Call at 95

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 0 |
| | | =(0.5*E29+0.5*E31)/(1+D8) | |
| | 1.766395 | | 1.69 |
| | | 3.146917 | |
| | | | 5.22 |

또한 보통 Discount를 할 때는 일정한 이자율, 즉 고정된 금리를 사용한다. 그런데 여기에서 고정된 금리를 사용한다는 것이 말이 안 되므로 위와 같이 평균을 구한 다음에 해당 Rate Tree Cell에 있는 금리만큼 Discount 시켜주는 것이다.

- **콜 옵션 헤지하기**

이자율이 변동하면, 채권과 채권 옵션의 가격도 변동한다. 채권 옵션 투자자들은 보통 채권 가격의 변동에 따라 옵션 가격이 얼마나 벼동하는지를 알고자 하는데, 우리는 이것을 hedge ratio로 (혹은 delta ratio) 측정하고자 한다.

우선 콜옵션의 hedge ratio는

$$\Delta_{Call} = \frac{C_u - C_d}{T_u - T_d}$$

이 된다. 여기에서 T는 기초자산인 T-bond를 말한다.

여하튼 아래와 같은 트리를 통해 Hedge ratio를 구할 수 있다.



**PV (포트폴리오)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 110 |
| | | 102.11 | |
| | 101.33 | | 110 |
| 95.51 | | 106.69 | |
| | 108.79 | | 110 |
| | | 110.22 | |
| | | | 110 |

**Price (T-bond)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 100 |
| | | 92.11 | |
| | 91.33 | | 100 |
| 95.51 | | 96.69 | |
| | 98.79 | | 100 |
| | | 100.22 | |
| | | | 100 |

**Two-year European Call at K=95**

| | | |
|---|---|---|
| | | 0 |
| | 0.739153 | |
| 1.766395 | | 1.69 |
| | 3.146917 | |
| | | 5.22 |

**Hedge Ratio**

| | |
|---|---|
| Price | 30.826 |
| | 0.368996 |
| 0.322757 | |
| | 1 |

These hedge ratios give us the sensitivity of the option to changes in the underlying Treasury price by describing the change in the option's price per dollar change in the Treasury's price.

또한 이는 우리들에게 어떻게 Treasury를 옵션으로 Hedge 해야 하는지도 알려준다.

이건 왜 1이 나오나? 이 상태가 되면 up이건 down이건 상관없이 항상 행사될 것이다. 따라서 이 시점에 채권 하나를 사 오는 것이다.

- **이에 대해서 풋옵션에 대해서도 할 수 있다.**

**(풋옵션 연습)**

**PV (포트폴리오)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 110 |
| | | 102.11 | |
| | 101.33 | | 110 |
| 95.51 | | 106.69 | |
| | 108.79 | | 110 |
| | | 110.22 | |
| | | | 110 |

**Price (T-bond)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 100 |
| | | 92.11 | |
| | 91.33 | | 100 |
| 95.51 | | 96.69 | |
| | 98.79 | | 100 |
| | | 100.22 | |
| | | | 100 |

**Two-year European Put at K=100**

7.89

**Hedge Ratio**

| | |
|---|---|
| Price | -43.42 |

**PV (포트폴리오)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 110 |
| | | 102.11 | |
| | 101.33 | | 110 |
| 95.51 | | 106.69 | |
| | 108.79 | | 110 |
| | | 110.22 | |
| | | | 110 |

**Price (T-bond)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 100 |
| | | 92.11 | |
| | 91.33 | | 100 |
| 95.51 | | 96.69 | |
| | 98.79 | | 100 |
| | | 100.22 | |
| | | | 100 |

**Two-year European Put at K=100**

| | | |
|---|---|---|
| | | 7.89 |
| | 4.89853 | |
| 2.911797 | | 3.31 |
| | 1.507423 | |
| | | 0 |

**Hedge Ratio**

| Price | -43.42 |
|---|---|

| | |
|---|---|
| | -1 |
| -0.45457 | |
| | -0.93768 |

Delta Hedge는 다음주에 이야기하도록 하겠다. 이게 BDT 모형의 끝이다.



# 금융공학17 - Implied Binomial Tree

2007년 5월 31일 목요일
오후 2:39

- **Implied Binomial Tree**

이거 쓴 사람이 Mark Rubinstein 이다. 이 사람은 CRR 논문의 또 다른 한 저자이기도 하다.

이 Implied Binomial Tree를 구해내는 과정은 그냥 산수이다. 저자는 Binomial tree를 만들어 낸 사람인데, 이걸 가지고 실제 세상에서 적용을 해 보았다. 그렇게 옵션가를 계산해 보았는데, 이론가격과 실제가격이 비슷하긴 비슷한데 완전히 똑같지는 않았다. 그래서 이 사람은 그 가격을 정확하게 맞출 수 있는 Tree를 다시 계산하면 어떻게 될 것인가를 생각해 보았다. 즉 Tree를 뒤에서부터 그려서 앞에 값이 얼마인지를 거꾸로 유도해 내는 과정이라고 보면 된다.

아래와 같은 콜옵션이 있다고 해 보자.

| S | K | dt | Rf | sigma |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 100 | 1 | 5.00% | 20.00% |

이걸 바탕으로 Implied Binomial Tree를 구해보도록 하자.

- **참고 - 행사 가격이 0인 콜옵션**

  행사 가격이 0인 콜옵션은 무엇인가?
  만약 그런 옵션이 있다면 얼마를 받아야 할까? 이걸 어떻게 Hedge 하냐면, 이것의 가격은 바로 현재 주가이다. 그런데 행사가격=0 인 콜옵션을 판 다음에 hedge하려면 주식을 하나 사면 된다. 그리고 주가가 올라갔다고 해 보자. 그럼 그 사람의 행사가격이 0이기 때문에 행사를 하려고 할 것이다. 예를 들어 현재 주가가 200이라면 이걸 0원을 주고 사게 된다. 이 경우 내 수중에는 200이 있으므로 그걸 주면 된다. 이게

바로 행사가격 0인 콜옵션이다.

이 옵션이 실제로 있기는 있다. 즉 삼성 전자 주식에 대해 행사 가격 0인 것이 상장이 되어 있고, 사람들이 이거 가지고 거래도 한다. 그럼 왜 이런 옵션을 사는가? 예를 들어 삼성 전자 주식을 굉장히 많이 가지고 있는데, 한 주라도 더 사는 순간에 지분의 변화가 생긴다고 해 보자. 이 경우 세금 체계가 달라져서 더 많은 세금을 물어야 할 수도 있다. 그런데 시장 상황을 보니 주가는 오를 것 같다? 이 경우에 행사 가격이 0인 콜옵션을 사는 것이다. 이 때는 주식 자체를 사는 것이 아니기 때문에 지분의 변화를 일으키지 않고 이익만을 볼 수 있기 때문이다. (지분을 10% 이상 가질 때 등록 & 의결권 제한 등의 문제를 피하기 위해)

이런 식으로 파생 상품이 개발되는 이유는 규제의 회피 때문이다. 세금의 회피라든지...

- **실제 Implied Binomial Tree 계산**

df= 0.9875778

| Node | Strike | Price | P0 | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 139.85 | 130 | 0.34 | | | | | | 0.0349519 |
| 122.29 | 115 | 2.13 | | | | | 0.1767128 | 0.8685559 |
| 106.94 | 100 | 7.44 | | | | 0.3172652 | 3.9389281 | 1.3928351 |
| 93.51 | 90 | 13.9 | | | 0.356683 | 5.3744726 | 5.7060559 | 1.7423545 |
| 81.77 | 80 | 22.78 | | 0.0765916 | 4.8187874 | 8.5471247 | 7.4731838 | 2.091874 |
| 71.5 | 0 | 100 | 0.0377954 | 6.2628951 | 33.353428 | 33.928341 | 21.610207 | 4.8880297 |

유성환:
(Price÷DF) ÷ (Node-Strike)

유성환:
P5 ÷ (Node[i] - Strike[j] ) =
0.0349519 ÷ ( 139.85 - 115)

유성환:
1-(P1+P2+...+P5)

유성환:
(Price÷DF - Sum Pij) ÷ (Node-Strike)

실제로는 위와 같은 방법으로 구해낸다. 왼쪽 node, strike, price는 현실 세계에 존재하는 상품들이다.

이 때 각 상품별 Price에는 아래와 같은 공식이 성립해야 한다.

$$0.34 = \frac{[(139.85 - 130) \times P_5 + 0 \times P_4 + 0 \times P_3 \cdots]}{Discount}$$



$$2.13 = \frac{[(139.85 - 115) \times P_5 + (122 - 115) \times P_4 + 0 \times P_3 + \cdots]}{Discount}$$

이 식을 보면 뒤쪽은 다 0이니까, df(discount)를 안다고 생각하면 옵션의 가격이 0.34가 되게 만드는 숫자를 거꾸로 계산해 낼 수 있게 된다. 이런 식으로 $P_n$을 각각 구해주면 된다.

사실 여기까지만 구해도 굉장히 중요한 이야기이다. 이것이 말하는 바가 무엇인가? 바로 시장에서 거래되는 옵션의 가격을 보고 미래의 주가가 어떻게 될 것이라는 정보를 얻어낼 수 있다는 것이다. 즉 주식의 가격에는 사람들의 기대심리가 반영되어 있는데, 그것을 위와 같은 방법으로 뽑아낸다는 의미이다.

다르게 설명하자면, 139.85가 될 거라고 생각하는 사람이 몇 명이 있고, 122.29가 될 거라고 생각하는 사람이 얼마 있고.. 그런 이야기이다. 이를 통해 $P_n$을 구하는 것을 Implied Distribution Tree라고 한다. 즉 실제로 거래되는 가격을 보고 사람들의 마음 속에 숨어 있는 기대 심리를 뽑아내는 것이다.

이런 식으로 각 노드 n이 어떤 확률 $P_n$을 가지는지를 보게 된다. 일단 생각해야 하는 것이 무엇인가? 전부 6개의 노드가 있다고 해 보자. 이 때 6개의 노드를 던지려면 동전을 몇 번 던져야 하는가? 6번 던지면 된다. 이를 나타내면 아래와 같다.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 6 |
| | | | | 5 | |
| | | | 4 | | 6 |
| | | 3 | | 5 | |
| | 2 | | 4 | | 6 |
| 1 | | 3 | | 5 | |
| | 2 | | 4 | | 6 |
| | | 3 | | 5 | |
| | | | 4 | | 6 |
| | | | | 5 | |
| | | | | | 6 |

위와 같은 식이 될 것이다. 그 각각의 경우의 수를 구하도록 한다.

이 때 마지막에 각 state에 있을 확률을 nodal probability라고 하며, 해당 경로에 도달하는 확률을 Path probability라고 한다.
그런데 맨 끝은 Nodal probabilty나 path probabilty가 서로 같다는 특징을 가진다. 아래와 같이 테이블로 나타내어 보자.

| Ending Nodes | Nodal Prob. | # of Paths | Path Prob. |
|---|---|---|---|
| 5 | 0.03495 | 1 | 0.03495 |
| 4 | 0.17671 | 5 | 0.03534 |
| 3 | 0.31727 | 10 | 0.03173 |
| 2 | 0.35668 | 10 | 0.03567 |
| 1 | 0.07659 | 5 | 0.01532 |
| 0 | 0.03780 | 1 | 0.03780 |

즉 **(Path Prob) = Nodal Probability($P_n$) ÷ (# of path)** 인 것을 알 수 있다.

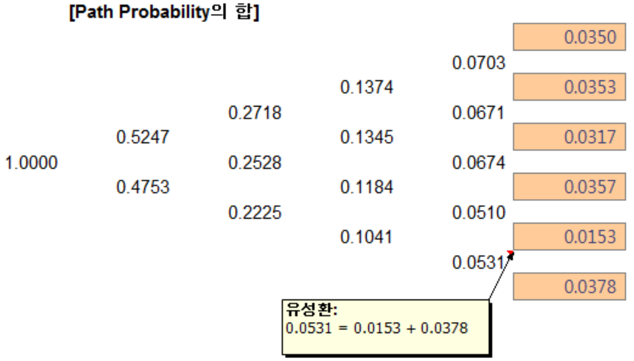
이 내용을 설명해 둔 것이 As simple as one, two, three 문서이다.

여하튼 문제는 이 Path probability가 서로 같지 않다는 것이다. 사실 우리의 Binomial tree를 보면 Path probability가 서로 같다. 그런데 위에서 보면 알겠지만, 사실 서로 다른 것이다.

이제 각 cell 별로 해당 cell에 도착할 path probability를 구해보도록 하자. 맨 오른쪽은 아까 위에서 구한 Path Probability 들이다. 그럼,

- **Node 별 Path Probability**

[Path Probability의 합]






와 같이 됨을 알 수 있다.

즉 앞 노드는 뒤의 두 노드의 합이다. 이런 식으로 앞쪽으로 죽죽 구해가다 보면 해당 Node에 도착할 Path probability를 위와 같이 구할 수 있다.

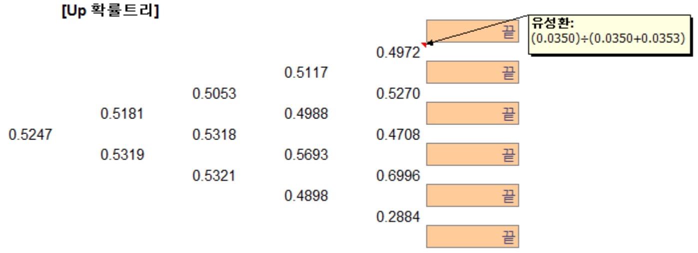
이제 이것을 이용하여 원래 트리 setting에서의 up, down probability를 거꾸로 구해보도록 하자. 어떻게 구할 수 있을까?

이를 직관적으로 설명하자면 예를 들어 1000 명의 사람이 Binomial tree를 타고 움직인다고 보는 것이다. 그래서 어떤 노드까지 온 사람이 702명이고, 그 사람들이 다음번 스텝에서 위로 349명 가고 아래로 353명 갔다고 치는 것이다. 이런 식으로 확률 트리를 구할 수 있으며, UP할 확률에 대해서만 아래와 같이 구해보도록 한다.

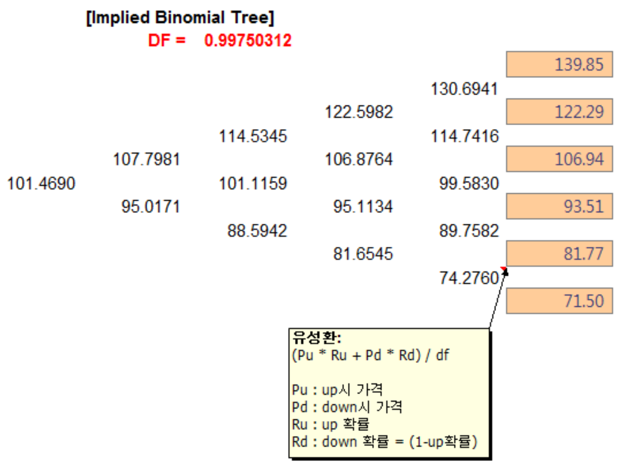
- **Up 확률트리**

위에서 구한 [Path Probability의 합]을 이용하여 아래와 같이 [Up 확률트리]를 구할 수 있다. 즉 Up 될 확률만을 구한 것이다.

[Up 확률트리]




이제 마지막 스텝으로 Implied Binomial Tree를 그려보자. 우선 처음 가정한 숫자들을 오른쪽에 죽 써준다. 그리고 위에서 구한 Up 확률트리를 이용하여 구하면 된다.




Trick : 마지막 시기의 가격 사이사이의 행사가격을 알아서 집어넣어야 한다.

즉 이것이 바로 implied tree를 이용하여 구한 가격 모형이다. 먼저 실제 시장에서 돌아다니는 상품들을 조사하여 각 node에 도착할 확률을 구하고, 각 node로 올라갈 path probability를 구한다.

여하튼 이 확률을 알고 있으면 한 단계씩 앞으로 나아가 평균을 구하고 discount 해서 구할 수 있다. 이런 tree를 구하는 모든 과정의 기본적인 출발은 옵션의 시장가 부터였다. 즉 실제 시장 가격으로부터 거꾸로 계산한 셈이다.

Implied binomial tree의 실제 용도는 이걸 이용해서 다른 종류의 파생상품을 pricing 하는 것이다. 예를 들어서 Barrier option을 pricing 하겠다, 그럼 binomial tree를 가정해서 pricing 하거나, 혹은 지금 현재 시장 가격을 맞출 수 있는 implied binomial tree 등을 구해서 pricing 할 수 있다. 둘 중에 원하는 것을 하면 되는데, 보통 두 번째 방식이 더 정확하다.

한 가지 짚고 넘어갈 문제가 있는데, 맨 끝에서 100이 아닌 다른 값이 나왔다. 사실 이건 논리에 약간 문제가 있어서 그런다. $P_0$ 노드의 값을 구하는



것이 문제인데, 실제로 $P_0$은 -가 나와 버린다. 이게 말이 안되기 때문에 좀 임의적으로 1 이상이 나오도록 조정해 주었기에 100이 아닌 다른 숫자가 나온 것이다. 제대로 계산하면 100이 나온다. ($P_0$ ~ $P_5$ 까지 음수일 수 있으나 합하면 1이 나온다. 따라서 음수 조정시 "1" 이상이 되는 것이다)

즉 $P_0$ >= 0 이라는 제약 조건을 임의적으로 추가하였기 때문에 100보다 큰 값이 나와버린 것이다.

이런 식으로 마이너스가 나오는 경우는 문제가 된다. 그래서 수학적으로 이게 마이너스가 안 나오게 하는 여러 방법들이 개발되었다.

# 금융공학18 - Delta Hedge

2007년 6월 6일 수요일

오후 12:56

- **Delta Hedge [Chapter 15 : 344-352]**

  Delta는 주가 변동량에 대한 옵션가 변동량이다. 식으로 나타내면,

  $$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

  가 된다.

  Delta Hedge는 동적인 Hedge 방법으로도 불리는데, 이를 통해서 riskless portfolio를 만들어 낼 수도 있다.
  이 시뮬레이션을 통해서 주가의 흐름을 만들어 낼 수 있다. 이걸 통해서 Delta hedge를 어떻게 하는가? 이 때 Binomial tree가 그려져 있지 않기 때문에 아래와 같은 방법으로 구한다. 아래는 콜옵션 Delta hedge이다.



40.00% 기초자산의 변동성

50 행사가격

| Time | 기초자산 | 무위험 이자율 | Delta | 주식수 | Cost | Cum. Cost | 이자비용 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 49 | 5.00% | 0.548 | 0.548 | 26.842428 | 26.842428 | 0.0258224 |
| 1 | 52.040742 | 5.00% | 0.641 | 0.093 | 4.8649313 | 31.733182 | 0.0305273 |
| 2 | 49.353455 | 5.00% | 0.554 | (0.087) | -4.305316 | 27.458393 | 0.026415 |
| 3 | 46.892053 | 5.00% | 0.462 | (0.092) | -4.304915 | 23.179893 | 0.0222991 |
| 4 | 46.993427 | 5.00% | 0.460 | (0.002) | -0.083058 | 23.119134 | 0.0222406 |
| 5 | 46.83152 | 5.00% | 0.448 | (0.012) | -0.57453 | 22.566844 | 0.0217093 |
| 6 | 47.450089 | 5.00% | 0.467 | 0.018 | 0.8771926 | 23.465746 | 0.0225741 |
| 7 | 45.49593 | 5.00% | 0.378 | (0.088) | -4.014081 | 19.474239 | 0.0187342 |
| 8 | 45.445547 | 5.00% | 0.367 | (0.012) | -0.540198 | 18.952775 | 0.0182326 |
| 9 | 43.638465 | 5.00% | 0.278 | (0.089) | -3.886479 | 15.084529 | 0.0145113 |
| 10 | 44.139069 | 5.00% | 0.285 | 0.007 | 0.3270571 | 15.426097 | 0.0148399 |
| 11 | 46.15506 | 5.00% | 0.365 | 0.080 | 3.6867594 | 19.127696 | 0.0184009 |
| 12 | 46.955229 | 5.00% | 0.392 | 0.028 | 1.2971192 | 20.443217 | 0.0196664 |
| 13 | 42.832883 | 5.00% | 0.175 | (0.218) | -9.317623 | 11.14526 | 0.0107217 |
| 14 | 39.415894 | 5.00% | 0.050 | (0.124) | -4.903908 | 6.2520732 | 0.0060145 |
| 15 | 39.599571 | 5.00% | 0.038 | (0.013) | -0.510718 | 5.7473694 | 0.005529 |
| 16 | 36.728091 | 5.00% | 0.004 | (0.034) | -1.249538 | 4.50336 | 0.0043322 |
| 17 | 40.901347 | 5.00% | 0.022 | 0.019 | 0.7572148 | 5.264907 | 0.0050648 |
| 18 | 39.433081 | 5.00% | 0.002 | (0.021) | -0.810597 | 4.4593749 | 0.0042899 |
| 19 | 40.169588 | 5.00% | 0.000 | (0.001) | -0.059317 | 4.4043478 | 0.004237 |
| 20 | 36.87961 | 5.00% | 0.000 | (0.000) | -0.001763 | 4.4068215 | |
| | | | | | | 4.4068215 | |

$$Delta = N\left( \frac{LN(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(\frac{T-t}{52})}{\sigma \times \sqrt{\frac{T-t}{52}}} \right)$$

$$주식수_i = Delta_{i-1} - Delta_i$$

$$Cost_i = 주식수_i \times 기초자산_i$$

$$Interest\,Cost_i = Cum\,Cost_i \times \exp(\frac{r}{52}) - Cum\,Cost_i$$

$$Cum\,Cost_i = Cum\,Cost_{i-1} + Interest\,Cost_{i-1} + Cost_i$$

$$Cum\,Cost = S \times e^{r\frac{1}{52}}$$

**(Put option에 대해서는 교과서 346-347에 있다)**

이렇게 1주가 지나면 Simulation에 의해서 새로운 주식의 가격이 또 하나 만들어진다. 이렇게 새롭게 주가가 변동하면 당연히 Delta 도 변화한다. 즉 주가가 떨어지면 사고, 주가가 오르면 파는 그런 방식으로 계속 Hedging을 하는 것이다.

이 때 Cost는 주식을 새로 사고 파는데 드는 돈을 말하며, Cum Cost는 현재 내 수중에 있어야 하는 금액을 말한다. 즉 만기까지 가지고 갔을 때 나에게 드는 총 비용이다.

$$Call\text{가격} = Cum\,Cost \times e^{-\frac{r}{52}(T-t)}$$

이렇게 시뮬레이션을 돌려서 무지무지 많이 시켜보면 Histogram 형태로 뽑아 볼 수 있게 된다.

Time=t 에서의 특징은 주가가 떨어지면 주식을 팔아야 한다는 것이다. Delta Hedge 관점에서는 주가가 떨어지면 주식을 팔고, 주가가 오르면 사야 한다. 이 일을 계속 반복하는 것이다. 그런데 이는 경기가 안정적이지 못한 국가에서의 투기적 행태와 유사하여, 경기 불안정(변동)을 심화시킨다.

그런데 이 행위 자체 때문에 문제가 된다고 주장하는 사람들이 있다. 예를 들어 1987년에 Black Monday가 있었다. 그 원인 중 하나가 바로 Delta Hedge이다. 왜? 누군가가 option을 다 팔았는데, 주식 시장에 외부로부터 충격이 있었다. 주식을 팔려고 하면 또 떨어진다. 그래서 또 판다. 그래서 10% 밖에 안 되는 충격이 점점 더 커져서 20% 이상 주가가 떨어지게 된 것이다.

**이 Delta hedge에 관해서도 [[시험문제]] 이다. Hull 책 예제이기 때문에 잘 읽어서 준비해보도록 하라.**

만기의 Delta는 항상 '0' 인가?



아니다. S(T) < K 인 경우 Call 행사를 안 하니까 "Δ=0"이 되고, S(T) ≥ K인 경우 행사하니까 "Δ=1"이 된다.

Q. 거래비용과 Hedge 비용을 Minimum으로 만드는 기간은?

이건 사실 논문의 주제와도 가깝다. "open question"