금융공학01 [완료]

2007년 3월 13일 화요일
오후 3:14

- **Introduction**

  동전 앞면이 나왔을 경우 22만원, 뒷면이 나왔을 경우 0만원을 준다면 얼마를 베팅하여야 하는가? 양쪽이 나올 확률을 모두 1/2라고 할 때 상식적으로 11만원 이하를 베팅하여야 한다. 이를 risk averse(위험 회피)라고 한다.

  하지만 여기에 13만원 거는 risk taker도 있다. 이른바 "복권"을 사는 사람이다. 복권은 항상 자신의 기대값보다 비싸다.

- **Arbitrage**

  - **가격이 너무 높게 잡혀서 Arbitrage가 발생하는 경우**

    1) H 11만원 / T 11만원 betting 10만 * betting = price라고 봐도 됨!
    2) H 22만원 / T 0만원 betting 9만
    3) H 22만원 / T 11만원 betting 16만원

    위와 같은 베팅 시장이 있다고 해 보자. 그런데 3) 시장을 열어서 16만원을 투자자들에서 받고 이 돈으로 1)에 10만원, 2)에 4.5만원을 투자한다고 해 보자. 그럼 1.5가 남는다.

    따라서 이 경우 동전을 던져서 H가 나오면,

    11*1 + 22*4.5/9 - 22 = 0+1.5 만큼을 벌게 된다.

    또한 동전을 던져서 T가 나오면,

    11*1 + 0*4.5/9 - 11 = 0+1.5 만큼을 벌게 된다.

    즉 동전의 앞면이 나오든 뒷면이 나오든 항상 1.5 만큼을 벌 수 있다는 이야기이다!

    그렇다면 어디에서 틀린 것일까? 주어진 케이스의 16만원이라는 가격이 너무 큰 숫자라는 것이다.

    그럼 3)의 가격을 14만원으로 한번 낮춰보자.

  - **가격이 너무 낮게 잡혀서 Arbitrage가 발생하는 경우**

    1) H 11만원 / T 11만원 betting 10만 * betting = price라고 봐도 됨!
    2) H 22만원 / T 0만원 betting 9만
    3) H 22만원 / T 11만원 betting 14만원

    그런데 이 경우에는 1) 시장을 열어서 10만원만큼을 받고, 2)시장을 열어서 4.5만원을 받는다. 그리고 3) 시장에 14만원을 베팅하면 0.5가 남는다. 각 상황을 보면,

    동전을 던져서 H가 나오면,

    22 - 11*1 - 22*4.5/9 = 0+0.5 만큼을 벌게 된다.

    동전을 던져서 T가 나오면,

    11 - 11*1 - 0*4.5/9 = 0+0.5 만큼을 벌게 된다.

    이런 식으로 가격이 너무 높거나 낮게 잡힘으로서 위험 없이 돈을 버는 것을 Arbitrage가 발생한다고 한다.

    그렇다면 위의 문제에서 3) 상품의 적정가는 무엇일까? 14.5만원이 된다. 이렇게 하면 주어진 시장에서의 적정 가격이 되는 것이다.

- **균형 가격 만들기**

  그렇다면 이 균형가격은 어떻게 만들어야 하나? 앞면이 나올 경우 받을 돈과 뒷면이 나올 경우의 받을 돈이 균형을 이루어야 한다. 즉 1) 상품에 x1만큼을 투자해서 앞면이 나오면 받는 돈과 2) 상품에 x2만큼을 투자해서 앞면이 나오면 받는 돈이 3 상품에 투자해서 앞면이 나오면 받는 돈과 동일해야 한다. 이를 각기 수식으로 나타내면,

  $11 \times x_1 + 22 \times x_2 = 22$ [앞면]
  $11 \times x_1 + 0 \times x_2 = 11$ [뒷면]

  이 두 식을 연립하면 되며, 이를 풀면 $x_1 = 1$, x_2 =0.5가 나온다.

따라서 3) 상품의 가격은 10 × x_1 + 9 × x_2 = 14.5 가 나온다. 이렇게 해야 앞면/뒷면이 나오든 상관없이 돈을 벌 수 있는 기회가 사라지게 된다.

- **정의**
  - § **arbitrage** : 아무런 위험을 감수하지 않고도 돈을 벌 수 있는 것을 말한다.
  - § **균형가격** : arbitrage가 발생하지 않는 가격.

즉 이는 3) 상품을 1), 2) 상품을 이용해서 "복제" 했다고 이야기 할 수 있다. 이렇게 pricing을 하는 방법을 가지고 "Pricing by replication"이라고 한다.

이러한 상품들은 현실상에 존재하는 상품들이다. 1) 과 같은 상품들도 현실상에 존재한다.
예를 들어 앞면을 "경기가 좋아진다", 뒷면을 "경기가 나빠진다" 라고 생각해 보자. 그럼 생각해 볼 수 있다. 경기가 좋건 나쁘건 일정한 수익률을 보장해 준다? 예금이 대표적인 예이다. 하지만 투자에서는 채권(bond)이라고 한다. 정해진 시점에 따라 만기 시점에 일정한 금액을 준다. 3) 와 같은 상품? 경기가 좋아지면 돈을 받고 나빠지면 잃는다? 주식이 대표적인 예이다. 2)는 돈을 버는 정도를 보면 2배 이상을 벌고, 대신 실패하면 원금조차 날린다? 이게 바로 "옵션"이다.

따라서 채권과 주식의 가격을 알면 옵션의 가격을 결정할 수 있다. 또한 그렇게 되어야 한다. 그렇지 않으면 누군가가 arbitrage를 이용하여 무위험으로 돈을 벌어버리고 만다. 이것이 pricing의 가장 기본적인 idea라는 것이다.

- **다음 예제**

위에 주어진

1) H 11만원 / T 11만원 betting 10만

의 경우에서 H와 T를 각각 u_1, u_2로 하자. 그러면,

11 u_1 + 11 u_2 = 10
22 u_1 + 0 u_2 = 9

u_1 = 9 / 22

u_2 = 11 / 22

그래서 3)의 가격을 구할 때 u_1, u_2를 이용할 수 있다.

☐ **status price**
22 × u_1 + 11 × u_2 = 22 × (9 / 22) + 11 × (11 / 22) = 14.5

이 때 H=1만원, T=0만원인 4) 상품이 추가되었다고 하자. 이의 가격은 어떻게 구하면 되겠는가? 이 때 u_1과 u_2를 이용하면 된다. 따라서 price = 9/22 가 된다.

또한 H=0만원, T=1만원인 5) 상품의 가격을 볼때, 이 때의 price는 u_2, 즉 11/22 가 된다.

$$22\times(\frac{u_1}{u_1+u_2})\times(u_1+u_2)+11\times(\frac{u_2}{u_1+u_2})\times(u_1+u_2)=22\times u_1+11\times u_2=14.5$$

이 식에서 의미가 있는 부분은 아래의 부분이다.

$$\frac{u_1}{u_1+u_2}$$
$$\frac{u_2}{u_1+u_2}$$

= 이 부분이 의미가 있는 것이다. 즉 "확률"임을 나타낸다는 것이다.

[중요]
이는 동전 앞면/뒷면이 나오는 1/2 확률을 이용한 것이 아니라 다른 가격들을 이용한 상대 pricing으로 확률을 구한 것과 같다. 따라서 위의 식을 표현할 때 df $E_Q(X)$ 라고 표시한다. (결국 모든 pricing은 모두 이것으로 귀결이 된다는 점이다)

위의 분수 확률들을 **risk-neutral probability(위험 중립 확률)**이라고 부른다. 그리고 동전 앞/뒷면이 나올 확률을 사용하지 않는다는 사실을 기억해 두라.

$$p_j=\frac{u_j}{\sum_{i=0}^{n}u_i}$$

따라서

$$p_1 = \frac{u_1}{u_1 + u_2}$$

또한 H=1만원, T=1만원인 상품을 생각해 보자. 이 경우에는 $u_1 + u_2 = 20/22$ 가 된다. 이를 **discount factor (할인율)** 이라고 부른다.

- **risk-neutral probability**

  20이나 11과 같은 숫자들은 모두 정해져 있는 숫자들이다. 어떻게 바꿀 수 없다. discount factor는 다른 것들이 모두 정해져 있는 시점에서 14.5 가 나오게 만드는 p 가 바로 risk-neutral probabiliity, 다른 말로 하면 arbitrage가 나오지 않게 하는 값이다. 즉 risk-taking, risk-averse, 등등 여러 사람들이 있음에도 그 가격은 무조건 14.5 이어야 한다. 왜냐하면 14.5 만이 arbitrage가 발생하지 않는 가격이기 때문이다.

  이 확률은 즉 arbitrage가 발생하지 않도록 균형가격을 만드는 확률이다. 다만 이것이 하필이면 그 사람이 risk를 피하기 위한 값인 p 와 일치하는 것이다. 그래서 그 값을 risk-neutral probability라고 부르는 것이다.

  - **arbitrage를 vector로 설명하기**

    여기의 모든 pay-off들은 사실 모두 vector로 표시할 수 있다.

```
                    |
                    |
                    |     *           *
                    |
--------------------+-------*------------------------
                    |
                    |
                    |
                    |
                    |
```

선형대수적으로 설명하자면, 위의 모든 것들은 하나의 basis로 설명 가능한 것이다. 즉 서로 linearly dependent 하다.

n개의 증권이 있으면 n개의 공간을 만들 수 있고, 이를 통해 arbitrage가 어떻게 나오는지 수학적으로 설명이 가능하다. 즉 선형 독립적인 vector가 3개 이상 존재하면 이것으로 arbitrage가 생기는 것이다. 따라서 위의 간단한 동전 던지기 게임은 사실 vector로 설명이 가능하다.

- **옵션**

  옵션은 "추후 행사할 권리"이다.

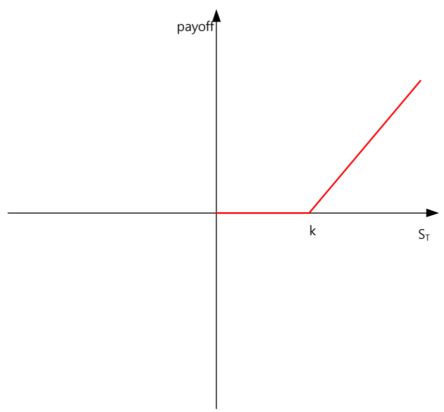
  § European Call : 이는 "만기 시점"에서만 행사할 수 있다. 만기 시점 이전에는 행사하지 못한다.

  § **유러피안 콜 옵션의 payoff :**
  Payoff = Max(S_T-K, 0)

  T: 만기시점 (연단위)
  S_T : T 시점의 기초자산의 가격 (주식이 기초자산이라고 생각하면 쉽다)
  K : 행사 가격

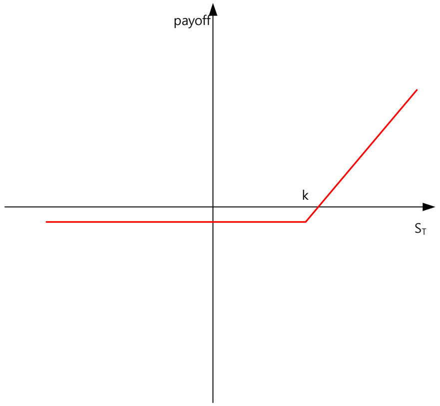
예를 들어 삼성 임원들에게 주는 stock option이라면 이는 삼성전자 주식을 특정한 가격에 살 수 있는 옵션을 의미한다. 이를 "행사가격"이라고 한다.
예를 들어 삼성전자 가격을 50만원이라고 하자. 그런데 이걸 지금으로부터 1년 후에 50만원에 살 수 있는 권리를 준다고 하자. 그러면 별 도움 안 될 것 같지만, 만약 100만원으로 올랐다고 하면? 50만원을 공으로 버는 것이다. 그런데 만약 30만원이 된다? 그 경우 30만원 짜리를 50만원 주고 살 수는 없으니 포기해 버리는 것이다.

이를 그림으로 그리면 아래와 같다.



즉 50만원보다 조금이라도 높으면 그 만큼의 이익이 생기는 것이다.

그런데 이 그림만을 보면 매우 이상하다. 손해는 없고 이익만 발생한다? 그럼 누구나 다 사려고 할 것이다. 따라서 이를 살려면 현재 시점에 얼마만큼의 가격을 지불해야 한다. 그걸 고려하면 아래와 같이 된다.

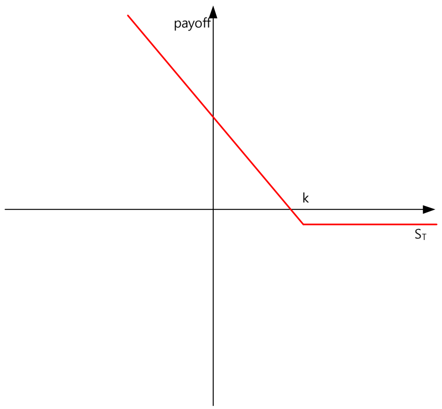


[콜옵션 / Long position]

§ Put option

Payoff = Max(k-S_T, 0)

이는 만기 시점의 주가가 떨어지면 떨어질수록 돈을 번다.

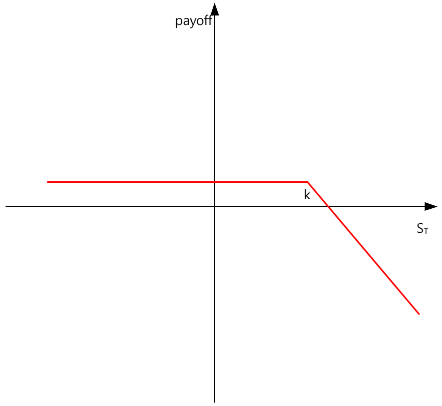


[풋옵션 / Long position]

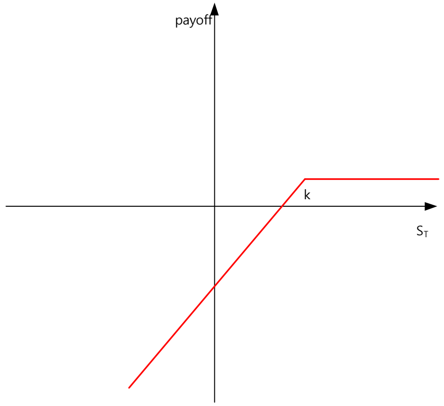
§ Long position
long position을 취했다는 의미는 옵션을 샀다는 의미이다.

§ Short position
Short position을 취했다는 의미는 옵션을 팔았다는 의미이다. 따라서 Short position의 경우에는 정반대의 Payoff를 가진다.

따라서 short position의 경우 정반대의 payoff를 가진다.



[콜옵션 / Short position]



[풋옵션 / Short position]

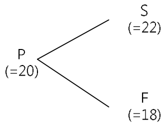
사실 Long과 Short 중에 short가 더 불안하다. long은 예상이 맞으면 돈을 무한대로

벌 수 있는데, short는 예상이 틀리면 그만큼 돈을 잃게 되는 것이다. 그래서 long position인 사람은 betting이라고 생각하면 된다. 가격이야 어차피 만원이니까.. 반면 short는 잃으면 무한대로 잃을 수 있다. 그럼 누가 short position을 취해주느냐? 그 사람들은 사실 베팅을 하는 것이 아니라 다른 식의 방법을 쓰는 것이다. 그런 사람들을 두고 IB, 투자 은행이라고 한다.

- **IB의 선택**

장외시장 : 기관과 기관, 기관과 기업 등 사이에 옵션 계약을 하는 입장.
IB의 입장이라고 할 때, 약간의 돈을 주고 예상이 맞으면 돈을 벌게 된다. 그 얼마 안 되는 돈을 벌기 위해서 감수해야 하는가?

예를 들어 현재 시점의 가격을 20만원이라고 하자. 이 주식의 가격은 3개월 후에 22만원이 될 수도 있고 18만원이 될 수도 있다고 하자.



그런데 K=21 / T=0.25 (3개월)인 콜 옵션을 사고 싶다고 하자. 그럼 이걸 도대체 얼마를 받고 팔아야 할까?

우선 콜옵션의 Payoff = max(S_T-K, 0) 에서 이것이 upstate가 되면 얼마만한 가치가 있을까?
⇒ S: 1이 된다. (st=22, k=21; st-k=1)
반면 Downstate에서는 다음의 가치가 있다.
⇒ F: 0이 된다.

이 경우 돈은 없지만 신용이 무지무지하게 좋아서 돈을 맘대로 조달할 수 있다고 하여 보자. 옵션을 판 다음에 hedge를 해야 한다. 주가가 오르면 손해를 보기 때문에 주가가 오르면 이익이 되는 상품을 사야 된다. 그게 뭐냐? 바로 주식이다.

- **Hedging**

즉 적정한 주식 개수를 하나 사서 주가가 올라가나 내려가나 내 수입/손실을 항상 일정하게 한다는 것이 불가능할 것처럼 보이나 가능하다.

그럼 해당 주식을 0.25개 샀다고 하자. 이 때,

Upstate :
-1 + 0.25*(22) = 4.5

Downstate:
0 + 0.25*(18) = 4.5

즉 해당 주식을 0.25개 소유하게 되었을 때 upstate가 되건 downstate가 되건 포트폴리오의 가치가 4.5, 4.5로 일정하게 된다. 따라서 주식을 0.25개 가지면 되는 것이다.

다른 식으로 설명하자면, 이것은 동전 던지기 게임의 다른 버전이라고 할 수 있다. 따라서 채권/예금 등도 주변에 있으며, 주식과 채권을 함께 사 두어서 replication을 할 수도 있다. 위의 경우에서 0.25는 마치 채권과 같은 포트폴리오가 된다.

- **Hedging 유도**

교과서 참조하도록 할 것!

금융공학02 [완료]

2007년 3월 8일 목요일
오후 8:52

- **Option pricing**

  Call option과 Put option의 가격을 계산하는 식을 말한다. 1973년에 Black Sholds가 제대로 된 모형을 만들어냈다.

  - **Put-call parity**

    이는 put 가격과 call 가격 사이에 특정한 관계가 설립하는데, 이에 대한 공식이다.

    이 Put-call 관계에 대한 논문을 발표하면서, european과 american 모두에 대해 설립한다고 주장하였다. 그런데 볼튼은 european에 대해서는 설립되는데, american에 대해서는 설립하지 않는다고 반박했고, 후에 사실로 증명되었다. 즉, 이 Put-call parity는 european에 대해서는 설립하는데 american에 대해서는 설립하지 않게 된다.

    [P-C parity - XLS 참고]

	현재	만기일	
		S* < 100	100 < S*
Long a Call	-C	0	S*- 100
Long a Put	-P	100 -S*	0
Long Asset	-100	S*	S*
Short PV of K	95.12	-100	-100
Total	-P-4.88	0	S*- 100

$$C = P + S - Ke^{-rT}$$

Call option의 pay-off : Max(S_T-k, 0)

우선 A는 call option을 하나 샀다고 하자. A는 만기 시점의 주가가 S*<100 작으면 0을 받고, 크면 (S*>100)이면 돈을 받는다. 이것이 Long a call이다.

반면 B라는 사람은 ① 풋 옵션을 하나 사고(얼마인지 모른다. 하지만 우선 P로 놓자), ② 자산(Asset)도 사고, ③ Strike price K의 현재가만큼 팔았다.

Put option의 payoff: Max(K-S_T, 0)

그런데 이 B라는 사람은 K=100이기 때문에, 만기 시점의 주가(S*)가 100보다 크면 돈을 받되, 그렇지 못하면 돈을 받지 못한다. 또한 Asset의 경우도 100보다 작으면 100보다 작은 그 금액만큼을 벌 수 있다. 즉 S* 만큼의 돈을 항상 벌 수 있게 된다.

그리고 K=100를 은행에서 빌려왔는데, 이를 PV(5%)로 바꾸니 95.12 가 되었다. 이는 1년이

지나서 주가가 100보다 작든지 크든지 정확히 K만큼의 금액을 은행에 갚아야 한다.

즉 B는 포트폴리오인데, 이래저래 해 보면 아래 Total 만큼의 결과가 나오게 된다.
즉 결과적으로 B는 동시에 3가지 일(풋옵션 사기, 주식 사기, 은행대출)을 했는데, A의 Call option의 Pay off와 똑같다는 것이다. 즉 A와 B는 다른 일은 했지만 결국 같은 일을 한 셈이 되는 것이다.

이를 통해 Call 옵션과 Put 옵션의 가격을 결정할 수 있으며, -C = -P-4.88 이다. 즉 현재 시점에서 -C = -P-4.88 이어야 arbitrage 가 발생하지 않는다.

$$C = P + S - Ke^{(-rT)}$$

이것을 P-C Parity라고 부른다. 즉 C와 P가 얼마인지 몰라도 하나를 알면 다른 하나를 결정할 수 있게 된다.

미국의 옵션 거래가 장외 시장에서 시작된 해도 1973년이다. 옵션마다 가격을 형성하는데, 그 가격을 보고 실제로 식이 맞는지 검증을 해 봤는데, 실제로 보니 거의 맞았다. (맞지 않는다면 arbitrage를 이용할 수 있기 때문)

또한 위 식의 좌/우변을 서로 바꾸어서 풋옵션도 만들 수 있다.

$$P = C - S + Ke^{(-rT)}$$

즉 풋옵션이라는 것을 만들고 싶다, 그럼 오른쪽의 일을 하면 된다. 그럼 풋옵션의 Payoff와 동일하게 되는 것이다. 즉 콜옵션만 있어도 은행에 돈을 맡기고 빌리는 것으로 풋옵션과 동일한 일을 할 수 있는 것이다.

- **무위험 이자율이란?**

  r= 무위험 이자율

  이는 누구나 무위험 이자율이라고 하지만, 사실 우리나라 어디에서도 무위험 이자율을 발표하지 않는다. 그런데 위의 P-C Parity식을 r에 대해서 풀어보면 무위험 이자율을 구할 수 있다.

  즉 이를 r에 대해 풀면 아래와 같이 나오게 된다.

$$r = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{C-P-S}{-K}\right)$$

- **P-C Parity 예제**

  "권리행사 가격"이란게 있는데, 풋옵션과 콜옵션의 가격이 꽤 많다. 이를 통해서 만기가 얼마 남았는지를 볼 수 있다.

  주어진 엑셀 스프레드 시트 중에 첫번째 행을 보자. 왼쪽은 CALL 옵션이고, 오른쪽은 PUT 옵션이다. 이는 행사가격이 115인 것 중에서 만기가 2002년 03월에 돌아오는 콜옵션의 가격이 0.27 이라는 이야기이다.

200206	200205	200204	200203	가격	200203	200204	200205	200206
3.85	2.72	1.62	0.27	115	10.2	11.05	12.85	13.5
0	3.35	2.13	0.54	112.5	7.9	9.05	11	0
5.45	4.4	2.79	1.07	110	5.6	7.9	9.3	9.8
0	4.95	4.05	1.8	107.5	4	6	7.75	0

  그럼 r을 계산하기 위해 알아야 하는 것?

  C=콜옵션 가격
  P=풋옵션 가격
  K=콜/풋옵션 가격(즉 둘 다 같은 것을 풀어야 한다)
  S=기초자산의 가격

  - S 구하기 : 스프레드 시트의 아래에 보면 있다.

KOSPI 200	105.51	1.1▲	14.33▲	105.51	88.63
				(2002.03.05)	(2002.01.18)

    여기에서 보면 알겠지만, 105.51 이다.

  - T 구하기 :
    이는 만기까지 남은 날짜이다. 물론 단위는 연단위이기 때문에 day/365의 형태로 구해야 한다. 표 오른쪽에도 나와있듯 T=9일이 된다.

  그런데 이렇게 구해보면 마이너스로 값이 나온다. 그리고 각 열들은 기본적으로 서로 같은 숫자가 나와야 하는데, 각기 서로 다른 값이 나와버린다.

  [해석] 표 아래쪽을 보자. 재미있는 숫자열이 있다.

77.5	0.01	0.09
75	0.01	0
72.5	0.01	0
70	0.01	0
67.5	0.01	0
65	0.01	0
62.5	0.01	0
60	0.01	0
57.5	0.01	0
55	0.01	0
52.5	0.01	0

  0.01인데, 실제 가격은 1,000원이다. 이를 해석하자면 현재 KOSPI가 105 인데, 이게 9일 내로 77.5로 떨어질 가능성이 있기는 있다는 소리이다.

- 여하튼 이자율이 마이너스가 나와 버렸으므로 이걸 가지고 돈을 벌 수 있다. 즉 돈을 빌리면 돈을 버는 것이다. 100만원 받고 9일 후에 이자까지 90만원을 줘 버리면 된다. (^^;) 하지만 진짜 돈을 이렇게 빌려주는 사람은 없다. 따라서 "돈을 빌리는 것과 동일한 효과"만 나면 된다.
  P-C Parity 식을 옮기면 아래와 같다.

  $$-K_1e^{-rT} = C_1 - S - P_1$$

  즉 다른 사람에게 가서 Short a asset 해서 팔아버리면 된다. 그것이 주식을 short 한다는 의미이다. 주가가 떨어질 것 같으면 short를 하고 그렇지 않으면 안 하면 된다.

  KOSPI 200은 우리나라 주식들 중에서 큰 주식 200개를 모은 것. 그 200개를 동시에 팔아서 돈을 마련한다? 생각만큼 쉽지 않다. 따라서 short는 불가능할 때가 많다.

  그런데 또 생각을 해 보면, P-C Parity라는 식이 있기 때문에 Short를 왼쪽에 두어서 비슷한 효과를 내는 것을 만들어버리면 된다.
  그러면 어떻게 되나?

  $$-S = P_2 - C_2 - K_2e^{-rT}$$

  이 둘을 연립하면,

  $(K_2-K_1)e^{-rT} = C_1-C_2 + P_2-P_1$

  물론 이것을 그대로 이용할 수는 없다. 아래를 보자.

- Strategy

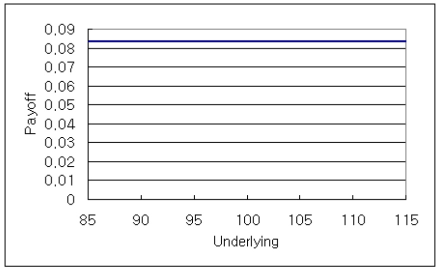
  행사가격이 90인 경우 만기시의 pay-off Put-call parity들은 k에 의존한다. S는 기초자산이기 때문에 못 한다.

  - 주가가 얼마가 되든지 상관없이 항상 돈을 버는 법

Call	Position	Price
90	1	11.38
95	0	7.68
100	0	4.80
105	0	2.77
110	-1	1.48

Put	Position	Price
90	-1	1.00
95	0	2.29
100	0	4.39
105	0	7.34
110	1	11.02

19.92



즉 이 경우 항상 돈을 번다! 그런데 돈을 얼마간 내야 한다.

위의 콜/풋옵션을 다 곱해서 더하면 19.92가 나온다. 즉 19.92 만큼의 초기 투자가 있어야 한다. 그러면 risk-free하게 돈을 벌 수 있다. 그런데 문제는 뭐냐? 19.92란 돈이 없다. 즉 남에게 가서 빌려와야 한다. 그걸 빌려와서 돈을 남길 수 있으면 되는데, 이자율 5%, 만기 14개월 남은 것을 생각한다고 해 보자. 1개월동안 얼마의 이자를 줘야 하나? 그걸 계산해 보면 0.08, 즉 기대수익율과 같게 된다. (^^)

- **Box spread**

이걸 프로그램화 하여 어느 시점에서 딱 사버리는 프로그램을 만들 수 있다. 즉 최소한의 수익율 만을 내면 된다라고 trader가 생각하는 순간이 있다. (혹은 휴가를 간다든지..) 그런 경우 이런 식의 position을 취해 놓으면 이런 전략을 취할 수 있는데, 이를 box spread라고 부른다.

우리나라 trader들은 변동성이 어떤 방향으로 갈 거라고 하는데, 자기 예상이랑 틀리면 돈을 많이 잃게 된다. 옵션 trader의 목표는 그거이다. 적지만 한 달에 1%씩만 벌어도 1년이면 12%가 된다.

- **Strategy List**

Hull책 10장을 보면 옵션 투자 전략이라 하여 이름이 붙어 있다. 한 번씩 해 봐라.

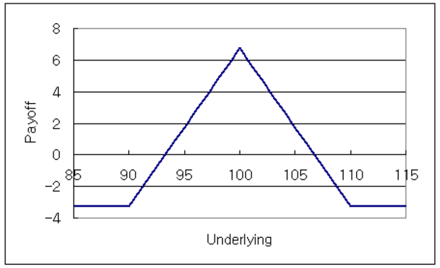
아래 예를 보자.

1달 안에 주가가 그렇게 크게 움직일 것 같지 않다? 그럼 이런 전략을 취할 수 있다.

Call	Position	Price
90	1	11.38
95	0	7.68
100	-2	4.80
105	0	2.77
110	1	1.48

Put	Position	Price
90	0	1.00
95	0	2.29
100	0	4.39
105	0	7.34
110	0	11.02

3.25
0.0135507

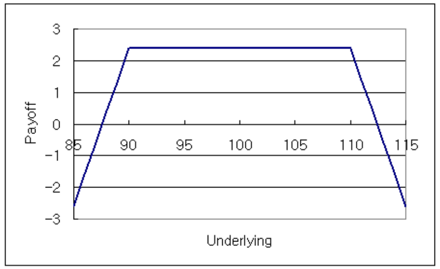


또는 아래와 같은 경우도 있다. 그런데 이렇게 사 놓으면 의외로 돈을 많이 벌게 된다.

Call	Position	Price
90	-1	11.38
95	0	7.68
100	0	4.80
105	0	2.77
110	0	1.48

Put	Position	Price
90	0	1.00
95	0	2.29
100	0	4.39
105	0	7.34
110	-1	11.02

-22.40
-0.093516



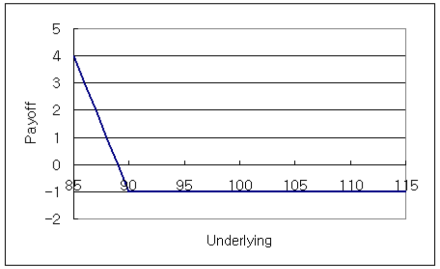
문제점은 한 번 예상 외로 움직이면 완전히 다 날라간다. 2001.9.11에 사고 터져서 다 잃은 경우도 많다.

옵션을 사는 사람들은 보통 개인 투자자들이 많이 산다. 즉 베팅을 한다고 생각하면 된다. 심한 베팅 가운데 하나는 이거다. 90이하로 내려가기만 바라는 것이다.

Call	Position	Price
90	0	11.38
95	0	7.68
100	0	4.80
105	0	2.77
110	0	1.48

Put	Position	Price
90	1	1.00
95	0	2.29
100	0	4.39
105	0	7.34
110	0	11.02

1.00
0.0041841



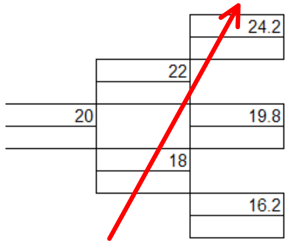
그런데 9.11에서 누군가 이거 해서 수익율 2000배를 낸 사람이 있다. (^^)

금융공학03 [완료]

2007년 3월 15일 목요일
오후 2:03

- **Binomial tree**

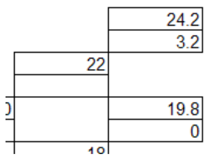
- **콜옵션 예제**
  Binomial tree가 아래와 같이 주어졌다고 하자.



각각에 option의 pay-off를 적는다. 각종 계수들은 아래와 같다.

sigma =	
dt =	0.25
u =	1.1000
d =	0.9000
r =	12.00%
K =	21
p =	0.6523

유로피안 콜옵션이기 때문에 현재 시점의 call option을 알고 싶지만, 제일 마지막 만기 시점에 되면 24.2, 19.8, 16.2셋 중 하나가 된다. 이 때 기초자산의 가격이 24.2면 얼마가 될 것인가? 24.2-21 만큼의 돈을 얻게 되는 것이다. 따라서 아래와 같이 나온다.



이 부분만 보면 one step이랑 똑같다. 그럼 22 시점에서의 옵션의 가격을

구하려면 어떻게 하면 되는가?

3.2*p + 0*(1-p) = 3.2*0.6523 + 0 = 2.0874

이를 현재 가치로 환산하면

Exp(-0.12*dt)*2.0874 = 2.025669189

따라서 이것이 22 시점의 옵션의 가격이 된다

- 참고 : 이 때 p 구하는 법
  P = $(e^{-rT} - d) / (u-d)$

이제 각각에 대해 f_u를 구해보도록 하자. 그럼,

		24.2
		3.2
	22	
	2.0256692	
20		19.8
1.2822924		0
	18	
	0	
		16.2
		0

와 같이 나오게 된다. 2.025라는 말은, 이 시점에서 2.025 돈을 받고 팔아버려도 된다는 의미인 것이다 따라서 option의 pay-off인 것처럼 생각해도 관계가 없다.

맨 앞쪽을 보면 옵션의 최종 가격이 나온다. 1.28이 나오는데, 그것이 주어진 시점에서의 옵션의 가치가 된다.

		f_{uu}
	f_u	
f		f_{ud}
	f_d	
		f_{dd}

$$\max(S-K,0)$$
$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$$
$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

f의 식을 보면 알겠지만, 이는 f_u나 f_d를 사용한 것이 아니라 맨 끝의 값만을 이용한다. 그리고 잘 보면 이것이 "이항분포"와 일치함을 알 수 있다. 즉 이 식을 알면 더 이상 앞부분을 계산할 필요 없이 제일 마지막 node만을 보고 option가격을 결정할 수 있게 된다.

- **풋 옵션 예제**

  콜옵션을 풋옵션의 식으로만 바뀌면 된다. (크게 다르지는 않다)

- **n-step binomial tree**

  u와 d를 왜 저렇게 곱하는가는 나중에 설명하겠다.

  이 트리는 0.6년이 만기인 call option이다. 가장 높게 올라가면 213, 가장 낮으면 46까지도 갈 수 있다.

  Rf = 위험 이자율

sigma =	40.00%					213.6025
dt =	0.1					103.6025
u =	1.1348				188.22268	
d =	0.8812				78.771305	
r =	5.00%			165.85843		165.85843
K =	110			56.952951		55.858433
p =	0.4882		146.15146		146.15146	
			39.109949		36.700091	
		128.78604		128.78604		128.78604
		25.706581		22.474084		18.786037
	113.48394		113.48394		113.48394	
	16.30418		13.174032		9.1252329	
100		100		100		100
10.045175		7.4957226		4.4325408		0
	88.118199		88.118199		88.118199	
	4.1736315		2.1530868		0	
		77.648169		77.648169		77.648169
		1.0458522		0		0
			68.422168		68.422168	
			0		0	
				60.292382		60.292382
				0		0
					53.128561	
					0	
						46.815931
						0

결론은 이렇게 나오게 된다.

[Q] Power Option의 가격을 구하시오

Max(S_T^2 - K, 0)

이런 payoff를 주는 옵션이 있다고 하자. (power option이라고 한다) 이 경우 binomial tree가 아래와 같이 나온다.

sigma =	40.00%					213.6025
dt =	0.1					45516.029
u =	1.1348				188.22268	
d =	0.8812				36062.622	
r =	5.00%			165.85843		165.85843
K =	110			28568.123		27399.02
p =	0.4882		146.15146		146.15146	
			22626.633		21699.554	
		128.78604		128.78604		128.78604
		17916.362		17181.158		16475.843
	113.48394		113.48394		113.48394	
	14182.193		13599.108		13039.717	
100		100		100		100
11221.873		10759.388		10315.686		9890
	88.118199		88.118199		88.118199	
	8508.1822		8156.1981		7818.4956	
		77.648169		77.648169		77.648169
		6444.2778		6176.3288		5919.2382
			68.422168		68.422168	
			4874.538		4670.4967	
				60.292382		60.292382
				3680.612		3525.1713
					53.128561	
					2772.4932	
						46.815931
						2081.7314

이렇게 엄청나게 나오게 된다. 그런데 너무 크니까 이렇게 수정할 수도 있

다.

이런 계산식도 있다고 해 보자.

Max(S_T^2 - K*100, 0)

sigma =	40.00%					213.6025
dt =	0.1					34626.029
u =	1.1348				188.22268	
d =	0.8812				25226.937	
r =	5.00%			165.85843		165.85843
K =	110			17786.48		16509.02
p =	0.4882		146.15146		146.15146	
			12030.844		10863.868	
		128.78604		128.78604		128.78604
		7832.9801		6658.868		5585.8433
	113.48394		113.48394		113.48394	
	4937.0452		3905.715		2713.2983	
100		100		100		100
3028.7656		2223.2158		1317.9724		0
	88.118199		88.118199		88.118199	
	1238.2858		640.19917		0	
		77.648169		77.648169		77.648169
		310.97387		0		0
			68.422168		68.422168	
			0		0	
				60.292382		60.292382
				0		0
					53.128561	
					0	
						46.815931
						0

이러한 상품을 판 다음에는 Hedge를 해 줘야 한다. 잘못하면 마지막 순간에 34626을 줘야 하기 때문이다. 그럼 어떻게 hedge를 해야 하나? 여기도 기본적으로 delta hedge를 해야 한다.

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{uS - dS}$$

즉 이렇게 한 다음에 하나에 100원 하는 주식을 145개 만큼 사 두면 된다. 어떤 종류의 옵션이라 하더라도, 유로피안 옵션인 경우에는 델타 헤지로 하면 다 먹혀들어가게 된다. 물론 실무에서는 시간이라든지, 제약이라든지 여러가지가 있을 수 있지만 그것을 제외하면 이렇게 된다는 의미이다.

- **Binomial tree의 일반화**

위의 문제에서 모두 up인 경우를 수식으로 표현하면, 맨 위 꼭대기에 있는

것은

$u^n S$

이렇게 표시할 수 있다. 그리고 이에 도달할 수 있는 경우의 수는 1개이다.

그보다 하나 밑에 있는

$u^{n-1} dS$

의 경우에는 $_6C_1$ = 6개가 된다.

이를 일반화하여 나타내면 각 노드별 기초자산의 가격은 아래와 같다.

$$\max(u^j d^{n-j} S - K, 0)$$

그리고 해당 노드에 도달하는 경우의 수는

$$C(n,j) \times p^j (1-p)^{n-j}$$

와 같이 나오게 된다.

이렇게 구한 다음에 이를 현재 가치로 discount 시켜주기 위해 앞에 e^{-rt}를 곱하면 되는 것이다. 따라서 최종적으로 옵션의 현재가치는 아래와 같다.

$$e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \{C(n,j) \times p^j (1-p)^{n-j} \times \max(u^j d^{n-j} S - K, 0)\}$$

그런데 오른쪽을 보면 max라는 연산자가 있다. 이는 연산하기에 꽤 어려운 함수이다. 따라서, 아래와 같이 연산량을 줄여 준다.

앞의 S_T가 충분히 크면, 즉 K보다 크면 max가 양수의 term으로 나오고 그렇지 않으면 무조건 0이 되어서 나온다. 만약 K를 만드는 최소한의 앞면 숫자를 안다 하면, 이 notation은 매우 쉽게 바뀔 수 있다.

아래 식을 보자.

$$= e^{-rT} \sum_{j=a}^{n} \{C(n,j) \times p^j (1-p)^{n-j} \times (u^j d^{n-j} S - K)\}$$

이 때 sum을 할 때 j=a부터 시작하는데, 이 a는 0이 나오지 않게 하는 최소한의 숫자이다. 즉 이걸 이용하면 더 이상 max라는 operator가 필요 없어서 위와 같은 식이 나오게 되는 것이다.

또한 식을 둘로 나누어서 쓸 수 있다. 그럼 최종적으로 아래와 같은 공식이 나오게 된다.

$$= e^{-rT} \left[S \sum_{j=a}^{n} \{C(n,j) \times p^j (1-p)^{n-j} \times u^j d^{n-j}\} - K \sum_{j=a}^{n} \{C(n,j) \times p^j (1-p)^{n-j}\} \right]$$

이 확률은 이항분포의 확률값이다. 유의할 것은, a부터 n까지 더해야 하는 것이다. 그런데 이항분포의 경우는 아주 특이해서 n이 충분히 커지면 정규분포를 따르는 성질이 있다. (이는 추후 다루게 됨)

- **블랙 숄즈 공식**

$$SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

즉 이것의 n 값이 충분히 커져서 정규 분포로 가면 위와 같은 식이 되어버리는 것이다. n이 충분히 커지면 블랙 숄즈 공식으로 수렴한다는 것을 알 수 있다. (다만 증명은 조금 힘든 편이다)

예를 들어 내가 n을 충분히 크게 나눈다고 해 보자. 그렇게 나눠도 여전히 binomial tree를 이용해서 구할 수 있다. 그런데 이렇게 구한 값들은 점점 블랙 숄즈 공식으로 수렴하게 된다는 것이다.

이 모형의 장점 가운데 하나는 경기가 올라갈 때와 내려갈 때 관계없이 pricing을 결정할 수 있다는 것이다. 다만 복제를 해 낼 수 있어야 한다는 것이 조건이다.

금융공학04 [완료]

2007년 3월 15일 목요일

오후 2:42

- **Random Variable**

앞면/뒷면 동전 던지기를 무한히 한다고 가정해 보자. 0과 1 사이의 임의의 숫자를 뽑는다는 이야기와 동전 던지기를 무한히 한다는 것은 서로 같은 의미이다.

즉 이진법을 생각해 보면 쉽다. 10111001 ... 이걸 10진수로 바꿀 수 있다. 여기에서 조금 더 발전해 나가보자.
0.10110101....
이런 식으로 계속 곱해나갈 수 있을 것이다. 만약 0.01111... 이걸 10진수로 바꾸어 본다고 해 보자. 얼마일까? 1/2이다. 즉 딱 0, 1 사이에서 수를 뽑았는데 그 확률이 1/2 일 가능성은 0.01111... 시퀀스가 나오는 확률과 같다는 의미이다.

따라서 동전을 무한히 던진다고 하는 것은 매우 특이한 것이다. 무한히 동전을 던진 결과

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \ldots$$

이런 시퀀스로 나온다고 생각하여 볼 수도 있을 것이다.

$$x_j(w) = \begin{cases} 1 & \text{If } w_j = H \\ -1 & \text{If } w_j = T \end{cases}$$

- § **"A random variable is a real-valued function defined on the sample space."**
- § 즉, Sample space에 대해서 정의된 실수값을 갖는 함수이다.

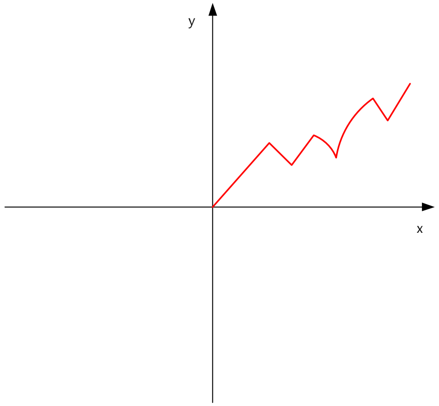
위에 omega라고 적은 이유는 무엇인가? Random variable은 변수가 아니라 함수이기 때문이다. 즉 "sample space"에서의 어떤 하나의 숫자를 만들어내는 함수이다. 그리고 그 경우 이 함수가 가질 수 있는 값이 1 혹은 -1 이 된다는 의미이다.

- **Random walk**

$$M_0 = 0$$

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad (k \geqq 1)$$

이것을 랜덤 워크라고 한다. 그래프로 그려보면 아래와 같이 나온다.
(1, -1 이 랜덤으로 나오는 것을 무한히 더했다고 해 보면 쉽다.)



$$M_{k_1} - M_{k_0,} M_{k_2} - M_{k_1,} \ldots M_{k_m} - k_{n-1}$$

§ **M_k의 평균**

이것의 평균은 0이고 분산은 모른다. 이는 k에 의해서 결정되게 된다.

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$
$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

이 때 X_1과 X_2가 꼭 독립일 필요는 없다. 하지만 분산의 경우에는 반드

시 독립이어야 한다. (종속이라면 뒤에 꼬리가 붙어야 한다.) 이걸 이용해서 M_k의 분산 및 기대값(E)을 구할 수 있게 된다.

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=1}^{k_{i+1}} X_j - \sum_{j=1}^{k_i} X_j = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$

(이 때 인덱스를 조심하도록 한다. 1~91 에서 1~90을 뺐으니 91~91 이 되는 것임을 명심한다.)

따라서 exp를 구하거나 var를 구할 때, 오른쪽 것을 이용하면 된다.
예를 들어 아래와 같은 경우를 생각해보자.

$$k_i = 10; k_{i+1} = 15$$
$$k_{i+1} - k_i$$

이보다 좀 더 복잡한 random work을 생각해보자.

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

고칠 것 Mnt -> Mn(t) 임
$M_n(t)$ = sigma X_j

s<t 일 때,

$$W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$$

이의 평균은 0이 된다.
아직 M_{nt}의 의미가 잘 안 와서 그러는데, 이것은 사실 기본적으로 동전던지기와 같다. Binomial tree를 그릴 때 동전의 앞면이 나오면 위로, 뒷면이 나오면 아래로 내려간다. 앞면이 2번 나오면 2가 되는 식인데, 이걸 식으로 나타내면 바로 M이 되는 것이다. 이것의 스케일을 조금 조정한 것이 위의 W_{nt} 함수이다.

그렇다면 이 상태에서 n이 무한대로 가면 어떻게 될 것인가? 동전 던지기를 무한히 많이 하면? 그럼 위의 식은 어떻게 될 것인가? 아래와 같이 극한을 취해주면 된다.

$$\lim_{n\to\infty} W^{(n)}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

이는 어떤 특정한 분포로 향하게 되는데, 그것이 바로 중심 극한이다. n을 키우면 결국에는 정규 분포로 가게 된다. t를 고정시킨 상태에서 다중 binomial tree의 오른쪽에 값들이 막 찍힐 것이다. 그 n을 늘린다는 의미는 이를 아주 잘게 짜른다는 의미이다. 그 경우 움직임은 1/sqrt n 씩 움직이게 된다. 이 때 마지막에 찍히는 점들의 빈도수를 그려보면 정규 분포가 나온다는 의미인 것이다. 이를 중심 극한의 정리라고 한다.

여하튼 결론은 n을 무한대로 하면 정규 분포를 취한다는 것이다.

- **중심 극한 정리의 증명**

§ **Moment generating function(MGF)**

이는 moment를 만들어 주는 함수이다. 통계학에서 모먼트는 E(X), $E(X^2)$, $E(X^3)$, .. 이 각각을 모멘트라고 부른다. 각각을 1차, 2차, 3차라고 하는데, 이걸 직접 계산하는게 의외로 어렵다. 그래서 대부분 moment generating function이라고 하는 다른 종류의 함수를 이용하게 된다.

$$E(e^{tX})$$

이걸 구할 수 있으면 모멘트 생성 함수가 되는 것이다.

$$E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

이렇게 이 식을 알고 나면 정규 분포의 모멘트는 다 구할 수 있게 된다. 어떻게 구하나? 이를 t에 대해서 한 번 미분하고 t=0을 넣으면, 1차 moment를 구할 수 있고, t=2를 넣은 다음에 2번 미분하면 2차 moment, 이런 식으로 구할 수 있다.

$$\frac{dE(e^{tX})}{dt} = (\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

이렇게 한 다음에 t=0을 넣으면 E(X)= M 이 나오게 된다.

§ 정규분포 수렴의 증명

그럼 MGF 를 이용하여 이제 위의 W 식이 정규 분포로 감을 증명하자.

W에 그대로 극한을 취하면 아무런 의미가 없기 때문에 위의 MGF를 이용해야 한다. 그렇게 한 다음에 극한을 취하여 그 수렴한 결과가 누구의 MGF를 거꾸로 찾으면 주어진 확률변수가 어떻게 가는지를 증명할 수 있게 된다.

$$E(e^{\mu \cdot w^{(n)}(t)}) = E\left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{n}} \cdot M_{nt}}\right] = E\left[\exp \frac{\mu}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j\right]$$

여기에서의 μ는 n과 같은 의미이다.

$$E\left[\exp \frac{\mu}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j\right] = \Pi_{j=1}^{nt} E\left[\exp \frac{\mu}{\sqrt{n}} X_j\right] = \left(\frac{e^{\frac{\mu}{\sqrt{n}}}}{2} + \frac{e^{-\frac{\mu}{\sqrt{n}}}}{2}\right)^{nt}$$

이제 여기에 극한을 취하면 되는데, 곧바로 극한을 취하는 것이 아니라 우선 log를 취해서 극한을 하면 훨씬 빠르게 된다. 양변에 log를 취하면,

$$nt \cdot \ln\left(\frac{e^{\frac{\mu}{\sqrt{n}}}}{2} + \frac{e^{-\frac{\mu}{\sqrt{n}}}}{2}\right)$$

x를 아래와 같이 치환해 주면

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}} ; \lim_{x \to 0} t \cdot \ln \frac{(\frac{1}{2}e^{\mu x} + \frac{1}{2}e^{-\mu x})}{x^2}$$

그런데 이대로 하면 바로 안 구해진다. 따라서 아래와 같이 로피탈의 정리를 이용하여 구해야 한다.

$$\lim_{x \to 0} t \cdot \ln \frac{(\frac{1}{2}e^{\mu x} + \frac{1}{2}e^{-\mu x})}{x^2} = t \frac{\frac{\mu}{2}e^{\mu x} - \frac{\mu}{2}e^{-\mu x}}{2x(\frac{1}{2}e^{\mu x} + \frac{1}{2}e^{-\mu x})}$$

$$t \cdot \frac{\frac{\mu^2}{2}e^{\mu x} + \frac{\mu^2}{2}e^{-\mu x}}{2} = \frac{\mu^2}{2}t$$

이제 이를 원래 모양으로 다시 돌아가기 위해 exp를 취해준다.

$$e^{\frac{1}{2}\mu^2 t}$$

이를

$$E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

의 식과 비교하여 보면 최종적으로 N(0, t) 가 나오게 된다.

바로 N을 무한대로 보내어 Brownian Motion에서 말하는 어떤 형태로 간다는 것이 핵심이다. 이 과정을 통해서 증명함으로 통해 보여주려고 한 것은, n이 너무 크지 않은 상태에서 어떤 모습일까를 생각해 보라는 것이다.

예를 들어 동전 10번 던지기를 가지고 H=1/sqrt(10), T=-1/sqrt(10)라고 해 보자. 이 상태에서 n=10이 아니라 n을 매우 크게 만들면 동전이 누적되는 모습이 어떻게 될까를 보자는 것이다. 그 최종 결과들을 오른쪽에서 보면 결국 표준 정규분포가 나온다는 것이다.

금융공학05 [완료]

2007년 3월 15일 목요일
오후 3:01

- **Brownian Motion**

Let (Ω F P) be a probability space. For each w∈Ω, suppose there is a continuous function w(t) of t>=0 that satisfies W(0)=0 and that depends on w.

Then w(t) is a Brownian motion if for all $0=t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ the increments $w(t_1)-w(t_0)$, $w(t_2)-w(t_1)$, .. $W(t_n)-w(t_{n-1})$ are independent and each of these increments is normally distributed with

$$E[\omega(t_i)-\omega(t_{i-1})]=0$$
$$Var[\omega(t_i)-\omega(t_{i-1})]=t_i-t_{i-1}$$
$$W^{(n)}(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}$$

이 때 P는 (a, b]의 길이를 재는 용도이다.

- **브라우니안 모션**

숫자를 하나 뽑는다(w). 숫자 하나에 대해서 W(t)가 존재한다. 이는 t함수(여기에서 t는 시간)에 대해 모양이 달라지게 된다. 이 W(t)를 브라우니안 모션이라고 부르는데, t=0이라고 놓고 시간을 여러 간격으로 자르고 나면 increment에 대해 생각할 수 있다. T_1에 해당하는 여러 W값이 있을 수 있는데, 그 중에서 이전(T_0)값을 뺀 값이 증분이 된다. 이들이 각각 $w(t_1)-w(t_0)$, ... 등이다. 그런데 이 t를 어떻게 자르느냐에 관계없이 다 독립이고 정규 분포를 따르게 된다는 것이 핵심이다.

따라서 이의 전체 평균은 0이고, 분산은 거리(t_i - t_{i-1})에 의존하게 된다.

$$W^{(n)}(t)-W^{(n)}(S)=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}-\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nS}$$

여기에서 제일 특이한 것 가운데 하나가 분산에 대한 식이다.

일반적으로 Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) 의 식이 성립한다. 그런데 위의 식에서 특이한 것은 Var간에 빼었는데도 t_i - t_{i-1}으로 "차"의 형태로 나온다는 것이다. 따라서 이를 주의 깊게 보아야 한다.

t_i 시점에서 보면 $W(t_i)$는 정규분포이다. t_{i-1} 시점에서 $W(t_{i-1})$도 역시 정규분포이다. 이 각각은 종속적이다. **그런데 이 두 개를 빼면 이는 독립적이다.** 따라서 이는 굉장히 특이한 형태의 stochastic process이다. 우리는 여기에서 나온 이 정의를 이용해서 W(t)가 가지고 있는 여러 특징을 설명하도록 한다.

- **Quadratic Variation**

$$[f,f](T) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} [(f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2$$

Where

$$\Pi = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

$0 < t_0 < t_1 < .. < t_n = T$

<노트 참조 A - 유실됨>

위를 쉽게 설명하자면 미분 가능성에 대한 이야기이다. 즉 함수의 연속성을 테스트하는 것이다. 그런데 Brownian motion의 함수를 여기에 집어넣으면 0이 안 나온다. 즉 "어느 시점에서 보더라도" 미분 불가능하다는 의미이다.

  - **Mean Value Theorem**

$$\frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = f'(t_j^*)$$

이의 목적은 기울기를 구하는 것이다. 미분한 값에 기울기를 넣었을 때 같아지는 점을 이용하는 것이다.

<노트 참조 B - 유실됨>

$$\sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j_1} - t_j)^2 < \|\Pi\| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j_1} - t_j)|$$

이 때 ||Π||의 값을 줄이면 줄일수록 0이 된다. Brownian motion도 0이 나오게 된다. 굉장히 continuous한 함수이고, 지그재그로 움직이는데 어느 점을 봐도 미분 가능한 점이 없다는 것이 특징이다.

- **Sampled Quadratic variation**

$$Q_\pi = \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$$

이는 0과 T 사이를 어떻게 나누느냐(partition)에 따라서 달라지게 된다. 특정 파티션이 주어졌다고 하고 이것을 구해보도록 하자.

우선 Q_π도 확률변수이다. 이 변수가 극한을 취했을 때 어디로 가느냐는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$E(Q_\pi); V(Q_\pi)$$

이 각각의 극한을 취해보면 된다. 그럼

$$\lim E(Q_\pi) \to T; \lim V(Q_\pi) \to 0$$

이렇게 된다. 즉 파티션을 늘이면 늘일수록 이렇게 된다. 따라서 Q_π->T로 감을 알 수 있다.

이런 식으로 증명하는 것을 Converge in L^2(혹은 L^p) 라고 한다.
이를 통해 평균과 분산을 구해서 평균은 일정한 숫자로 가고, 분산은 점점 작아짐을 보일 수 있다. 그리고 이를 통해 특정한 숫자로 수렴한다고 말할 수 있는데, 그 이유는 분산이 점점 작아지기 때문이다.

$$E[Q_\pi] = \sum_{j=0}^{n-1} E[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2]$$

이 때 기대값은 무엇인가? 이 각각은 increment이고, 이는 0이었다. 그런데 제곱이 붙었음에 유의하여야 한다. 따라서 variance를 구한다고 보아도 된다.

§ Variance의 정의

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} E[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1}) = t_n - t_0 = T$$

위와 같이 $E[Q_\pi]$를 구할 수 있다.

$$V\{[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2\} = E\left[([W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 - (t_{j+1} - t_j))^2\right]$$

$$= E[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4] - 2(t_{j+1} - t_j)E\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] + (t_{j+1 - t_j})^2$$

그런데 Brownian 모형의 경우 정규 분포가 되므로, 아래의 식을 적용하도록 한다. (통계학 책에 나온다)

$$E(X^4) = 3\sigma^4$$

(이는 X가 정규 분포를 하면 항상 성립함)

이걸 이용해서 다 넣어서 계산해 보면,

$$= 2(t_{j+1} - t_j)^2$$

이 된다. 그런데 정규분포하며 독립적임을 알고 있으므로, cross product는 생각할 필요가 없다. 따라서,

$$V(Q_\pi) = \sum_{j=0}^{n-1} V((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \leqq \sum_{j=0}^{n-1} 2\|\Pi\|(t_{j+1} - t_j)$$

그리고 Π를 0으로 극한을 취하면, $V(Q_\pi)$는 0으로 가게 된다.

즉 결론적으로 Q_π는 T로 간다고 말할 수 있는 것이다.

따라서 BM은 다른 것과 다르게 극한을 취하면 T가 나오며, 어떤 점에서도 미분 불가능하다는 아주 특이한 stochastic process이다. 그렇기에 일반적인 미적분은 BM에 적용할 수 없다.

그런데 BM의 미적분을 개발해 낸 사람이 있는데, 그 사람이 Ito이다. 이를 Ito Calculus라고 부른다. 이걸로 미분하는 법을 다음 시간에 배우게 되는데, 이것이 Ito Formula 이다.

금융공학06 [완료]

2007년 3월 22일 목요일
오후 2:02

- **Lebeque 적분**

f(x) = 0 if x 유리수 ∈ [0, 1]
　　 1 if x 무리수 ∈ [0, 1]

위와 같은 함수가 있다고 하여 보자. 이것도 함수인가? 함수는 함수이다. X 값 하나에 대해서 하나만 대응되기 때문이다.

이를 적분해 보자.

$$\int_0^1 f(x)dx$$

이것이 적분이 되는가? 쉽지 않다. 사다리꼴을 만들어서 점점 구간을 작게 만들어 적분을 해야 하는데, 이런 일반적인 방법으로의 적분이 가능하지 않다.

그런데 이걸 적분을 한 사람이 있다.

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

이렇게 나온다.

다음과 같은 논리 전개로 적분이 가능하다.

이유 : 유리수는 countable하다. (즉 자연수와 1:1 대응이 된다) 즉 0~1사이에는 어떤 유리수라 하더라도 "이건 몇 번째 숫자다"라고 count하는 것이 가능하다. 이를 count 하는 방법은 아래와 같다.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$

이런 식으로 count 하는 것이 가능하다. 그런데 무리수는 그렇지 못하다.

유리수는 그 각각의 길이를 모두 재 보면 0이다. 무리수도 각각을 재보면 0이다. 그런데 유리수는 countable 하다는 특징이 있다. Countable 하기 때문에, |A|의 길이가 있고 |B|의 길이의 합은 |A∪B| 하다. 따라서 유리수는 다 합해버릴 수 있다. 이걸 다 합하면 그 길이는 0이 나온다. 그런데 유리수 각각은 0이기 때문에 (f(유리수)=0 이므로) 그 합을 다 더한 것이 0이다. 따라서 무리수를 다 더한 것은 1이 나와야만 한다.

이는 Lebeque가 세운 이론이다. 사실 이를 써 먹을 곳은 별로 없다. 다만 이것이 유일하게 쓰이는 분야가 있는데 바로 확률 분야이다.

BM을 그래프로 그려보면 zigzag한 움직임으로 표현된다. 그런데 그 작은 부분을 잘라서 보아도 여전히 zigzag 하게 된다. 즉 그 안에도 그러한 움직임이 있는 것이다. 이것과 비슷한 분야가 바로 Fractal 이다. 어떤 작은 부분도 보면 그 안에 커다란 모습이 들어있게 된다. 따라서 BM 모형은 Fractal의 성격도 가지고 있다.

- **BM의 미분**

Quadratic variation이 0이 아니기 때문에 BM은 우리가 아는 것과는 다른 미분방식이 존재하게 된다.

일반적인 전미분은 아래와 같다.

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy$$

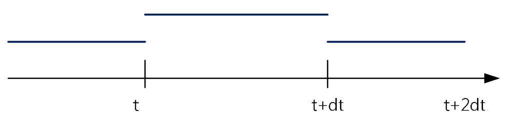
그런데 BM과 같은 경우에는 뒤에 뭔가가 더 붙게 된다. 이것과 연관이 있는 것이 Quadratic Variation 이다.

- **Wiener process**

여기에서 는 아래와 같이 표현된다.

$$z(t+\Delta t)-z(t)$$
$$\Delta z=\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

시간 간격을 나눠서 보면,



이런 식이다. 이의 분산은 Δt 가 나온다. 왜? Δt 만큼 떨어져 있기 때문이다. 이를 가지고 Stochastic differential equation(확률 미분 방정식)을 만든다.

- **Stochastic differential equation (확률 미분 방정식)**

일반적으로 이는
$$dx=a\cdot dt+b\cdot dz$$
의 형태로 표현된다. 이를 정리하면
$$\frac{dx}{dt}=a$$
이렇게 나온다. 그럼 원래의 x 함수는
$$x=at+c$$
이와 같다. 이런 것을 미방을 푼다라고 말한다.

그런데 이 x라고 하는 것은 deterministic form 이다. 따라서 이게 확률적인 것이라면 추가적인 term이 더 있어야 한다. 그래서 뒤에 dz라고 하는 것을 덧붙인 것이다. 이 dz가 어떤 값이냐에 따라서 그 형태가 변하게 된다.

$$dx=a\cdot dt+b\cdot dz$$

Drift volatility

주가를 예를 들어 설명해보자. 앞쪽의 것은 deterministic 하다는 것이다. 그

런데 주가가 그런가? 아니다. 변동성이 있다. 그것을 설명하는 것이 바로 뒤쪽의 volatility란 것이다.

그럼 이제 우리가 수익율을 계산한다고 하여 보자.

X_t를 t 시점에 내가 가지고 있는 금액이라고 하자. 이를 은행에다가 맡겼을 경우, 은행에 이자가 붙게 된다. 이를 수식으로 표현하면 아래와 같게 표현할 수 있을 것이다.

$$X_{t+\Delta t}=X_t(1+r)^{\Delta t}=X_t(1+\frac{r}{n})^{n\Delta t}=\underline{X_te^{r\Delta t}}$$

n을 무한으로 했을 때

그리고 X_t의 증가량은 아래와 같다.
$$\frac{\Delta X_t}{X_t}=\frac{X_{t+\Delta t}-X_t}{X_t}\simeq r\Delta t$$
위와 같이 나오게 된다. (뒤쪽은 delta를 아주 작게 했을 때)

그런데 이럴 리는 없다. 주식의 가격은 올라갈 수도 있고 내려갈 수도 있다. 그래서 μ만으로 표현하는 것이 아니라 뒤에 noise term을 더해주어야 한다. 이를 고려하면 아래와 같이 나온다.

$$\frac{\Delta X_t}{X_t}=(\mu+noise)\Delta t=\mu\Delta t+noise\Delta t$$
이 noise term은 아래와 같은 평균/분산을 가진다.

$$(0,\sigma^2\Delta t)$$

이 식을 정리하여 보면 아래와 같이 Stochastic differential equation 형태로 나오게 된다.

$$\frac{\Delta X_t}{X_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta z$$

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dz$$

이렇게 나오게 된다.

이제 이 미방을 풀면 아래와 같이 나오게 된다.

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu X_t$$

$$X_t = e^{\mu t}$$

즉 이것이 수익율에 대한 기대값인 것이다.

- **Ito's Lemma**

G라고 하는 함수가 하나 있다.

$$G(t,x)$$

이걸로 tailor series 전개를 하면,

$$\Delta G(t,x) = G_t \Delta t + G_x \Delta x + \frac{1}{2} G_{tt} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} G_{xx} (\Delta x)^2 + G_{tx} \Delta t \Delta x + \ldots$$

이런 식으로 계속 나가게 될 것이다.

그런데 G(t, x)는

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz$$

의 확률 미방 형태를 가지게 된다. 따라서

$$\Delta x = a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

형태가 된다.

일반적인 함수를 전미분하면 여기까지만 미분하고 뒷부분을 버리게 된다.

왜냐하면 뒤쪽이 매우 작아지게 되기 때문이다.

따라서 Δt가 0이 되면 어떻게 될까를 봐야 하는데, 문제는 x에 Δt가 있다는 것이다. 아래 테일러 전개식을 보자.

우선 앞에 두개는 당연히 살아남게 되고, 뒤쪽을 보면 Δt 제곱 부분은 더 빨리 0으로 가기 때문에 사라지게 된다.

$$\Delta G(t,x) = G_t \Delta t + G_x \Delta x + \frac{1}{2} \cancel{G_{tt} (\Delta t)^2} + \boxed{\frac{1}{2} G_{xx} (\Delta x)^2} + \cancel{G_{tx} \Delta t \Delta x} + \ldots$$

중요한 것은 이거다. 나머지 스트로크 한 것들은 Δt 때문에 0으로 가버린다. 이 부분을 풀면 아래와 같이 나온다.

$$(a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t})^2 = a^2 (\Delta t)^2 + 2ab\epsilon (\Delta t)^{\frac{3}{2}} + \boxed{b^2 \epsilon^2 \Delta t}$$

이 term이 어디로 가느냐가 중요한데, epsilon은 표준 정규 분포이고 이를 제곱하면 chi-square 분포가 된다. 여기에는 자유도(df)를 고려하여야 한다. Chi-square 는 정규분포 각각을 제곱해서 더하면 되며, Chi-square 분포의 평균은 자유도이다. 따라서 df=1 이고, 분산은 1이 된다.

정리해서 보면,

$$E[b^2 \epsilon^2 \Delta t] = b^2 \Delta t E[\epsilon^2] = b^2 \Delta t$$

$$V[b^2 \epsilon^2 \Delta t] = b^4 (\Delta t)^2 Var(\epsilon^2)$$

따라서 결론적으로 살아남는 애들은 아래와 같게 된다!

$$\Delta G(t,x) = G_t \Delta t + G_x \Delta x + \frac{1}{2} G_{xx} b^2 \Delta t$$

$$dG(t,x) = G_t \Delta t + G_x dx + \frac{1}{2} b^2 G_{xx} dt$$

$$= G_t dt + G_x(adt + bdz) + \frac{1}{2}b^2 G_{xx} dt$$
$$= (G_t + aG_x + \frac{1}{2}b^2 G_{xx})dt + (bG_x)dz$$

- **미분 외우는 규칙**

x	dt	dz
dt	0	0
dz	0	dt

수식 풀기가 힘들면 이 공식만 외워도 큰 문제는 없다. 즉 dz*dz 만 dt가 된다. 이걸 쉽게 적용해서 아래 공식을 외우면 된다.

$$dG(t,z) = G_t dt + G_z dz + \frac{1}{2}G_{zz}(dz)^2 = G_t dt + G_z dz + \frac{1}{2}G_{zz} dt$$

이제 이걸 가지고 연습을 함 해 보자.

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right\}$$

$$f(t,\omega_t) = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right\}$$

이를 t에 대해서 미분하면,

$$f_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)f$$

이를 w_t 에 대해서 미분하면,

$$f_{w_t} = \sigma f$$
$$f_{w_t w_t} = \sigma^2 f$$

따라서 df 는 아래와 같다.

$$df = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)fdt + \sigma f \cdot dw_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f(dw_t)^2$$

이를 정리하면,

- **$df = u\ f\ dt + \sigma\ f\ dW_t$**

이것이 블랙 숄즈 방정식의 가장 기본적인 식이다. 그리고 이걸 적분하면 위의 원 식이 나오게 된다.

- **선도계약 (Forward contract) 예제**

그 가격식은 아래와 같이 구한다고 알려져 있다.

$$F = Se^{r(T-t)}$$

r= 이자율, T = 만기

[Answer]

$$dF = F_s ds + F_t dt + \frac{1}{2}F_{ss}(dS)^2$$

이걸 구하면 최종적인 답이 아래와 같이 나온다.

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma Fd W_t$$
$$= e^{r(T-t)}(\mu Sdt + \sigma Sd W_t) - rSe^{r(T-t)}dt = (\mu - r)Fdt + \sigma Fd W_t$$

- **또 다른 풀이 예제**

$$G = \ln S$$
$$dS = \mu Sdt + \sigma Sd W_t$$

[A]

$$G_S = \frac{1}{S}$$

$$G_{SS} = -\frac{1}{S^2}$$

$$dG = \frac{1}{S}dS - \frac{1}{2S^2}(ds)^2 = udt + \sigma dW_t - \frac{1}{2S^2}(\sigma^2 S^2 dt) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

이렇게 된다. (중간에 dW_t^2 = dt 이고 dt^2=0임을 이용한다. 이건 외우자.)

즉 Ito식을 이용해서 풀 때 BM에서 $(dW)^2$ 이 살아남는다는 사실이 매우 중요하다. 왜 살아남나?

$$(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2$$

에서 이것이 없어지지 않는다는 사실이 매우 중요하다. 근데 이게 살아남아 있는데, 아래와 같다는 것이 중요하다.

$$(dW)^2 = dt$$

그래서 위와 같이 나오는 것이다. 또한 쿼드라틱에서도 t가 나오게 된다. 여하튼 손으로 계산을 할 때에는 위의 공식을 무조건 적용해도 큰 문제가 없게 된다. 그것이 바로 Ito's Lemma 이다.

그리고 오늘 다룬 Stochastic EQ 는 다 모두 Deterministic + Volatility 형태로 붙어서 나온다.

금융공학07 [완료]

2007년 3월 27일 화요일
오후 1:01

- **앞으로의 교과 내용 소개**
  - 지금까지 배웠던 것은 stochastic 이었는데, 이제는 더 이상 stochastic 이 아니게 된다. 즉 주어진 미방을 풀어야 BSM 이 나오게 된다. 그런데 이 형태의 미방은 다른 사람들이 다 풀어 놓았다.
  - 예를 들어 x -> y 형태가 된다는 것을 누군가가 다 풀어두었다. 그런데 다 풀어놓고 보면 x와 똑같이 나오지 않기 때문에 이를 x와 같게 만들어주어야 한다. (그런데 이거 만드는데 또 시간이 많이 걸린다.)
  - 그리고 x -> y가 되는 과정에서 또 많은 시간이 소요된다. 게다가 이렇게 푼게 정답인가? 그걸 확인하는것도 쉽지가 않다. 이를 위한 방법은 풀려진 식으로 실제로 미분을 해 보는 것이다. 그것이 만족함을 보이는 것에서 시간이 또한 소요되는 것이다.

  - 이런 과정을 할 수 있어야 실제로 BSM을 풀 수 있게 되는 것이다.
  - 그렇게 한 다음에 논문을 보아야 하는데, Cox, Rox, Rubinstein 이란 논문이다. (CRR이라고 부른다.) 1979년에 쓰여진 논문이다. 이 논문의 시작은 binomial tree이다. 그걸로 pricing을 한다. 그런데 그 과정에서 n을 무한대로 보내면 BSM과 똑같아 진다는 것을 증명하게 된다.
  - 중간고사 보기 전까지는 이 논문을 읽어보게 된다. 스스로 공부한 다음에 학기 중간쯤 논문을 읽어보면 논문이 이해가 될 것이다.

- **Black-sholes-merton differential equation**

  다음과 같은 stochastic differentiation을 따르는 주식이 있다고 보자. (기초자산이 이런 모습을 따른다)

  $$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

  그런데 아래와 같은 파생상품이 있다고 해 보자. 이를 F라고 표시하는데, 무엇에 영향을 받게 되나? 이는 함수식으로서 다음의 두 가격에 의

해서 영향을 받는다.

F(s, t)

그렇다면 이의 linear 형태가 어떻게 될 것인가를 먼저 구할 수 있어야 한다.

dF(s, t)

이를 구한다는 의미는, 기초자산이 deterministic 하게 움직이는 것이 아니라 random 하게 움직이는데 기초자산의 가격이나 시간이 약간 변했을 때 파생상품의 가격이 어떻게 변화하느냐의 형태를 식으로 기록하고 싶다는 의미이다.

여기에서는 만약 S, T가 일반적으로 우리가 아는 변수라면 아래와 같이 써버리면 된다. (전미분의 기본 공식이다)

$$dF(s,t) = F_s dS + F_t dt$$

하지만 이렇게 하면 답이 안 나온다. 따라서 뒤에 이걸 붙여줘야 한다.

$$dF(s,t) = F_s dS + F_t dt + \frac{1}{2} F_{ss} (dS)^2$$

(뒤에 이걸 붙이기 위해서 지금까지 Ito's lemma와 Brownian Motion 등등의 **삽질**을 해 왔던 것이다.)

위의 식을 풀면 아래와 같이 나온다. (간단한 대입 과정이다)

$$= F_s(\mu S dt + \sigma S dW_t) + F_t dt + \frac{1}{2} F_{ss}(\sigma^2 S^2 dt)$$

이를 한쪽에 dt, 또다른 한쪽을 dW_t를 가지도록 모아보자. 그러면,

$$= (\mu S F_s + F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss})dt + (\sigma S F_s) dW_t$$

이건 Ito의 업적이다. 따라서 그 당시에 이걸 알고 있던 사람은 누구나 다 이런 식을 유도할 수 있었다. 사실 아주 낮은 레벨의 수학을 쓴 것이다. 그런데 BS가 훌륭하다고 하는 것은, 랜덤한 S 부분을 없앴다는 것이다. 파생상품의 가격은 기초자산의 움직임에 따라서 당연히 랜덤한 부분을 포함하고 있다. 이 랜덤한 부분을 없애고 Deterministic 한 부분만을 남긴 것이다.

다만 이 식은 아래와 같이 솔루션이 있는 case 이다. 예전에도 풀어보았지만 아래와 같다.

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t - \sigma W_t}$$

이 때 아래와 같이 주식과 자산을 가지고 나의 포트폴리오의 가치를 계산한다고 해 보자. (주식을 a개, 파생상품을 b개라고 생각해도 된다)

$$\Pi = aS + bF$$

이렇게 구성한 포트폴리오를 Pi 라고 표시해 보자. 이를 약간의 시간이 흐름에도 동작하는 continuous한 버전으로 만들어보자. 예를 들어 주식을 하나 사고 콜옵션을 하나 산다면, 주식의 흐름에 따라서 주식의 가격이 변하고 주식의 가격이 변함에 따라 파생상품의 가격이 변화할 것이다. 이 때 a와 b의 변화는 상수이기 때문에 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\Delta\Pi = a\Delta S + b\Delta F$$

그런데 이 때 b를 하나 팔면(즉 b=-1) randomness를 가지지 않는 포트폴리오로 구성할 수 있다. 이 continuous 버전에 해당하는 것을 아래와 같이 쓸 수 있을 것이다. 즉 주식의 흐름을 discreet 한 버전으로 만

들 수 있다.

$$= a(\mu S\Delta t + \sigma S \Delta W_t) - [(\mu S F_s + F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss})\Delta t + (\sigma S F_s)\Delta W_t]$$

이 때 ΔF 는 맨 위에 있던 것에서 그대로 가져오면 된다.

그럼 이제 이걸 Δt, ΔW_t로 정리해 보자.

$$= (a\mu S - \mu S F_s - F_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss})\Delta t + (a\sigma S - \sigma S F_s)\Delta W_t$$

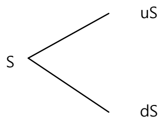
이 때 ΔW_t부분의 계수를 보면 a가 남아 있음을 알 수 있다. 그런데 이 때 a가 특정 값을 가지면 오른쪽의 random한 부분을 없애버릴 수 있게 된다.

이를 풀면 **a=Fs** 가 된다.

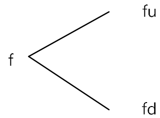
즉 파생상품을 하나 팔고 주식을 Fs 만큼 가지고 있으면 랜덤한 부분이 없는 deterministic 한 포트폴리오가 되는 것이다.

수업 초반에 binomial tree를 가지고 계산하던 것을 수식으로 표현한 것이라고 생각하도 된다.

아래와 같이 기초자산의 가격이 있다고 생각해 보자.



이걸 아주 제네럴하게 표현해 놓은 것이 바로 위의 S에 대한 식이란 것이다.



그런데 위의 상황에서 업/다운에 관계없이 포트폴리오의 가치가 변화하지 않는 Δ를 찾게 하는 것은 아래와 같다. (예전에 이미 풀어봤다)

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{\mu S - dS}$$

그런데 F를 어떻게 s에 대해서 미분하나? 쉽게 설명하면 기초자산의 가격이 약간 움직이는데 파생상품의 가격이 어떻게 변하는가에 대한 문제이다. 이 때는 극한을 취하면 랜덤니스가 없어지게 된다. 즉 업이건 다운이건 내가 구성한 포트폴리오는 동일한 가치를 지니게 된다는 것이다. 그것이 BSM의 첫번째 업적이다.

그럼 a=Fs로 놓고 소거하여 보자. 그럼,

$$(-F_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss})\Delta t$$

즉 이렇게 되면 불확실성이 없어지게 된다. 그런데 이것은 또한 무위험 이자 수익률과 같아야 한다. (금공의 기본 가정 가운데 하나가 바로 No Arbitrage이다. 만약 그게 아니라면 누군가가 arbitrage해버리기 때문에 식이 깨진다.)
따라서 arbitrage가 존재하지 않으려면 무위험 수익률과 같아야 하며, 이를 식으로 나타내면 아래와 같다.

$$(-F_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss})\Delta t = r\Pi\Delta t$$

(이 때 r은 무위험 이자율이다)

이 때 Pi는 무엇인가? aS + bF 가 된다. 아까 계산했듯이 a=Fs, b=-1이

다. 그러면 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$(-F_t-\frac{1}{2}\sigma^2S^2F_{ss})\Delta t=r\Pi\Delta t=r(F_sS-F)\Delta t$$

위의 식을 정리해서 풀어보면 아래와 같이 나온다.

§ BSM 미분 방정식 [중요]

$$rF=F_t+rSF_s+\frac{1}{2}\sigma^2S^2F_{ss}$$

이 식을 보면 알겠지만 랜덤한 부분이 없다. 그래서 이것이 바로 미분 방정식이 되는 것이다. 그리고 이 식을 BSM 미방이라고 한다. 왜 중요한가? 어떤 상품이냐에 관계없이 모든 파생상품은 이 식을 만족시켜야 하기 때문이다(그렇지 않으면 누군가가 Arbitrage해 버린다).

보면 알겠지만 미방은 유일한 해가 없다. 따라서 유일한 해를 결정해주기 위해서 미방에 한계값 (boundary condition)을 정해 주어야 한다. 즉 어떤 특정한 boundary condition을 주면 unique solution을 주게 된다.

- **예제 - European Call option**

European call option의 boundary condition을 구해 보도록 하자.
F(s, t)가 European call option의 가격이라고 했을 때 만기시점의 payoff가 어떻게 되는지를 구할 수 있다. 아래와 같이 만기 시점에서의 payoff를 정해주자.

$$F(S_T,T)=Max(S_T-K,0)$$

이 boundary condition을 이용하면 European call option의 수식이 나오게 된다.

어떤 식이든지 그 식이 파생상품의 가격을 나타내는 식인가 아닌가를

보기 위해서는 위의 BSM 미방에 넣어서 Equal을 성립시키는가를 확인해 보면 된다. 등식이 성립되면 파생상품이 되는 것이고, 성립시키지 못하면 파생상품이 아닌 것이다.

- **예제 - Forward Contract**

$$F=S-ke^{-r(T-t)}$$

이것이 과연 파생상품의 식일까 아닐까? 이걸 알아보려면 BSM을 만족시키기만 하면 된다. 한 번 풀어보도록 하자!

$$F_t=-rke^{-r(T-t)}$$
$$F_s=1$$
$$F_{ss}=0$$

따라서 풀어보면, 주어진 식을 만족시키게 된다.

$$rF=-rke^{-r(T-t)}+rS=r(S-ke^{-r(T-t)})$$

- **조언**

아주 이상한 식을 주고 다음 식이 파생상품이냐 아니냐? 이런 식의 문제를 할 수 있다. 파생상품의 식이냐 아니냐? 그걸 말로 주절주절 설명하면 다 틀린다. 무조건 BSM을 만족시키면 파생상품의 식이고 아니면 틀리는 식이다.

금융공학08 [완료]

2007년 3월 29일 목요일

오후 2:00

- **블랙-숄즈 공식(BSM)**

$$\frac{\sigma F}{\sigma t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\sigma^2 F}{\sigma S^2}+rS\frac{\sigma F}{\sigma S}-rF=0$$

모든 금융상품은 이 식을 만족시켜야 한다.

이 식만으로는 미방을 풀 수 없으므로, 아래와 같이 Boundary condition을 주어야 한다.

- **Boundary condition**

$$F(S_T, T)=\max(S_T-K, 0)$$

- **열 전도 방정식**

아래 식을 보자.

$$f(x,t)_t=c^2 f(x,t)_{xx}$$

이와 같은 형태의 미방은 열 전도 방정식이며, 이미 솔루션이 나와 있다. 이는 아래와 같다.

$$f(x,0)=g(x)$$

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\frac{1}{2\sqrt{\pi c^2 t}}exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{4c^2 t}\right\}du$$

[체크업] 맞는지 확인할 것!!

이것이 열역학 방정식인데, 이렇게 이미 풀려진 공식을 이용할 수 있다. 여기에서 S를 더 이상 확률변수라고 볼 필요가 없다. 이는 이미 변수이다. 따라서 이를 잘 변환시켜서 첫번째 변환을 시키고(즉 항을 모두 상수로 만듦), 두 번째 변환을 시키면 Fs를 없애게 된다.

결론적으로 이 적분을 계산하면 되는데, 이는 사실 정규분포의 적분과 같다. 정

규분포의 적분은 쉽지 않으므로 정규분포의 성질을 그냥 이용하는 편이 편하다. 평균 부분, 분산 부분을 잘 맞춰주면 적절한 부분이 밖으로 나와서 남아 있는 부분은 정규 분포의 식이 된다. 위의 식도 Transformation을 해 보면 A-무한대 이런 식으로 식이 바뀌게 된다.

그런데 [a-무한대]까지 적분을 하면 어떻게 표기를 해야 하나? 누적 정규분포의 값이 나온다. BSM을 미리 보았으면 알겠지만 그 형태 중 나오는 N(x)는 x부터 무한대까지의 값과 같다.

- **BSM의 미방 풀기**

아래와 같이 v를 이용하여 치환시켜서 풀도록 한다.

$$y=\ln\frac{S}{K}$$

$$\tau=T-t$$

$$\nu(y,\tau)=\frac{1}{K}F(s,t)$$

$$F(s,t)=K\cdot\nu(y,\tau)$$

위와 같이 F를 t에 대해 미분할 때 명시적으로 t는 없지만 tau 속에 숨어있으므로 **연속 미분법(chain rule)**을 이용하여 미분하여야 한다. 그런데 v가 어떤 형태인지 명시적으로 모르기 때문에, 아래와 같은 식으로 나온다.

- **F_t 구하기**

$$\frac{\sigma F}{\sigma t}=K\cdot\frac{\sigma\nu}{\sigma\tau}\cdot\frac{\sigma\tau}{\sigma t}=K\cdot\frac{\sigma\nu}{\sigma\tau}\cdot(-1)=-K\frac{\sigma\nu}{\sigma\tau}$$

- **F_S 구하기**

$$\frac{\sigma F}{\sigma S}=K\frac{\sigma\nu}{\sigma y}\cdot\frac{\sigma y}{\sigma S}=K\frac{\sigma\nu}{\sigma y}\frac{1}{S}$$

- **F_{SS} 구하기**

S term이 v 쪽에도 있으므로, 양쪽을 각각 구해서 아래와 같이 더하면 된다. (잘

이해할 것!)

$$\frac{\sigma^2 F}{\sigma S^2} = -\frac{K}{S^2}\frac{\sigma\nu}{\sigma y} + \frac{K}{S}\frac{\sigma(\frac{\sigma\nu}{\sigma y})}{\sigma S}$$

여기에 체인 룰을 적용시키면

$$\frac{\sigma^2 F}{\sigma S^2} = -\frac{K}{S^2}\frac{\sigma\nu}{\sigma y}+\frac{K}{S}\frac{\sigma(\frac{\sigma\nu}{\sigma y})}{\sigma S} = -\frac{K}{S^2}\frac{\sigma\nu}{\sigma y}+\frac{K}{S}\frac{\sigma(\frac{\sigma\nu}{\sigma y})}{\sigma y}\frac{\sigma y}{\sigma S} = \frac{K}{S^2}\left[\frac{\sigma^2\nu}{\sigma y^2}-\frac{\sigma\nu}{\sigma y}\right]$$

- **F_t, F_S, F_{SS}를 대입하기**

위의 BSM에 대입하여 풀면

$$-\frac{\sigma\nu}{\sigma\tau}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{1}{S^2}\left[\frac{\sigma^2\nu}{\sigma y^2}-\frac{\sigma\nu}{\sigma y}\right]+rS\frac{1}{S}\frac{\sigma\nu}{\sigma y}-r\nu=0$$

통분하여 정리하면

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\sigma^2\nu}{\sigma y^2}+[\frac{r-1}{2}\sigma^2]\frac{\sigma\nu}{\sigma y}-\frac{\sigma\nu}{\sigma\tau}-r\nu=0$$

$$\omega(y,\tau)=\nu(y,\tau)e^{-\alpha y-\beta\tau}$$

$$\nu(y,\tau)=\omega(y,\tau)e^{\alpha y+\beta\tau}$$

$$\frac{\sigma\nu}{\sigma\tau}=\beta\omega e^{\alpha y+\beta\tau}+\frac{\sigma w}{\sigma\tau}e^{\alpha y+\beta\tau}=\left[\beta w+\frac{\sigma w}{\sigma\tau}\right]e^{\alpha y+\beta\tau}$$

$$\frac{\sigma\nu}{\sigma y}=\left[\alpha w+\frac{\sigma w}{\sigma y}\right]e^{\alpha y+\beta\tau}$$

$$\frac{\sigma^2\nu}{\sigma y^2}=\left[\alpha\frac{\sigma w}{\sigma y}+\frac{\sigma^2 w}{\sigma y^2}\right]e^{\alpha y+\beta\tau}+[\alpha w+\frac{\sigma w}{\sigma y}]\alpha e^{\alpha y+\beta\tau}$$

$$\frac{\sigma^2\nu}{\sigma y^2}=\left[\alpha\frac{\sigma w}{\sigma y}+\frac{\sigma^2 w}{\sigma y^2}\right]e^{\alpha y+\beta\tau}+[\alpha w+\frac{\sigma w}{\sigma y}]\alpha e^{\alpha y+\beta\tau}$$

$$=\left[\alpha^2 w+2\alpha\frac{\sigma w}{\sigma y}+\frac{\sigma^2 w}{\sigma y^2}\right]e^{\alpha y+\beta\tau}$$

이걸 다 대입시켜서 정리한다. 그럼 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left[\alpha^2 w+2\alpha\frac{\sigma w}{\sigma y}+\frac{\sigma^2 w}{\sigma y^2}\right]+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(\alpha w+\frac{\sigma w}{\sigma y})-(\beta w+\frac{\sigma w}{\sigma\tau})$$

결국 w를 y에 대해서 한 번 미분한 계수가 0이 되도록 된다. 이 때 term이 2개가 나오는데, 둘 다 0이 나오도록 연립방정식을 풀며 그렇게 나오도록 하는 alpha와 beta를 구하면 된다. 이는,

$$\alpha=-\frac{1}{2}(k-1);\beta=-\frac{\sigma^2(k+1)^2}{2}$$

Where

$$k=\frac{2r}{\sigma^2}$$

이렇게 나오게 된다!

이를 위해서 지금까지 2번 transformation을 했다. 마지막 순간에 alpha beta를 이렇게 정의해 주면 처음 나왔던 열전도 방정식 형태로 나오게 된다는 의미이다.

- **Boundary condition의 정의**

그런데 문제는 이제 boundary condition이 어떻게 바뀌냐는 것이다. 우리가 원래 알고 있는 boundary condition은

$$F(S_T,T)=\max(S_T-K,0)$$

이다. 이를 위에서 했던 거랑 똑같이 transformation 시켜 주어야 한다.

$$\nu(y,\tau) = \frac{1}{K}F(S,t)$$

$$\nu(y,0) = \frac{1}{K}max(S_T - K,0)$$

$$= Max(e^y - 1,0)$$

갑자기 이렇게 나와서 당황할 수 있는데, 아래와 같이 1/K를 max 안쪽에 집어넣고 y의 정의를 보면

$$y = \ln\frac{S}{K}; \frac{S}{K} = e^y$$

를 적용하기 있음을 알 수 있다.

다시 원래대로 돌아와서

$$w(y,\tau) = \nu(y,x)e^{-\alpha y - \beta\tau}$$

그런데 alpha, beta는 이미 구해놓았으므로 이를 대입시켜서 정리해보면

$$w(y,0) = \max\left[\exp(\frac{1}{2}(k+1)y) - \exp(\frac{1}{2}(k-1)y),0\right]$$

가 나오게 된다.

따라서 열전도 방정식으로 돌아와서 c^2는

$$\frac{\sigma w}{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\sigma^2 w}{\sigma y^2}$$

즉 아까 찾았던 alpha, beta를 모조리 정리해보면 이렇게 나오게 된다는 의미이

다.

특정 파생상품을 주고 미방을 풀면, 최종적으로는 이 모습밖에는 안 나온다는 의미이다. 이제 이걸 직접 열전도 식에 넣어서 적분을 하면 된다.

*** 중요 : 시험에서 위의 식을 유도할 필요까지는 없다. boundary condition만 제대로 정하면 된다.**

- **적분**

그럼 이 Max를 어떻게 처리할 것인가? Exp 가 들어가 있기 때문에 y>0이어야만 의미가 있게 된다. 즉 y가 0보다 작으면 0이 나와버린다.
따라서 열전도 방정식 적분시 0~무한대 까지만 하면 된다.

$$\int_0^\infty (I_1 - I_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}exp\left[-\frac{(y-u)^2}{2\sigma^2\tau}\right]du$$

이 때,

$$I_1 = \exp(\frac{1}{2}(k+1)y)$$

$$I_2 = \exp(\frac{1}{2}(k-1)y)$$

가 된다. 이는 기본적으로 정규분포의 형태가 되는데, 평균은 y, 분산은 sqrt 부분이 된다.

여하튼 이걸 잘 계산하면 **S * 인테그랄 - kert * 인테그랄** 이런 식으로 나오게 된다.
그리고 왼쪽 오른쪽의 적분 영역이 서로 약간 다르게 나온다. 그래서,

$$SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

에서 d1과 d2의 모양이 약간 달라지게 된다.

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

쉽게 보면 평균이 y인 정규분포이다. 이를 y부터 무한대까지 적분하는 것이다.

- **정규분포 변환 관련 공식**

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$\int_{\frac{-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

[질문/답변 시간]

- v -> w로 왜 변환하나?
  - V_T, V_y, V_{yy} 를 구하는데, V_T, V_{yy}을 없애버려야 한다. Exp 식에서 alpha, beta를 정해주지 않은 단계에서 (계수)w_y 의 계수를 0이 되도록 일부러 변환을 해 주는 것이다. 그래야만 w_t와 w_{yy} 만 살아남게 된다. 여하튼 이렇게 변환시키고 alpha, beta를 잘 변환하면 w_t와 w_{yy}에 대한 식으로 나온다. 그리고 w_{yy}의 계수인 1/2(sigma^2)는 c^2가 된다!
- K를 쓰는 이유는, 이걸로 정의하지 않으면 너무 tedious한 work이 되어 버리기 때문이다.
- F(St-t) -> v -> w(y,0) 이런 식으로 변해간다. 그런데 이는 만기 시점에서의 payoff와 똑같다. 이 과정을 boundary에 대해서도 똑같이 옮겨가면 Max(S_T-k,0) -> .. -> Max(e 어쩌구 e 어쩌구 , 0) 형태로 나오게 된다.
  - 그런데 이렇게 옮겨줘야 미방을 풀 수 있기 때문에 옮기는 것이다. (사실 수학적으로는 동일한 식이다)
- v -> w를 변환시킬 때, 왜 하필이면 그 방법으로 변환시키느냐?
  - 누군가 똑똑한 사람들이 exp 함수의 성질을 이용해서 풀어놓은 것이다. Exp 함수는 cancel 하는 성질이 있기 때문이다. 즉 v_y 를 일부러 없애주기 위해서 exp를 사용해서 없앤 것이다.
  - 또한 y=ln(S/K) 일 때 K는 어떤 상수라도 상관이 없다. 그래도 문제는 똑같이 풀린다. 왜? 그래야 스스로 그 term이 지워지기 때문이다.

- **Alpha, beta의 값**
  - 다른 식에 적용할 때, BSM 이용하여 우리가 알고 있는 형태로 바꿀 때에는 alpha, beta는 항상 동일하다.

- **[BSM 이 미방을 만족시키는지 검사 - 연습문제 13-17]**

아래와 같이 스텝별로 나누어서 푼다.

$$F(s,t) = SN(d_1) - ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

이것이 BSM 미방을 만족시키는지를 보면 된다.

이 F(s, t)를 S에 대해서 미분하면 N(d_1) 이 나온다. (실제로는 훨 복잡한데 우연히도 이렇게 쉽게 나온다. 그래서 잘 모르는 애들한테 시키면 의외로 결과가 잘 나온다)

여하튼 아래를 보자.

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

이를 이용하여 미분한 값이 서로 같음을 증명하는 것이다.

$$SN'(d_1) = ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

이 때,

$$N'(d_1) = N'(d_2 + \sigma\sqrt{T-t})$$

따라서,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}(d_2 + \sigma\sqrt{T-t})^2]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}d_2 - \sigma d_2\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{T-t}]$$

$$= N'(d_2)\exp[-\sigma d_2\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)]$$

그리고 뒤쪽의 exp는

$$\exp[-\ln(s/k)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)]$$
$$=\exp[-\ln(s/k)-r(T-t)]$$
$$=\frac{K}{S}e^{-r(T-t)}$$

따라서

$$SN'(d_1)=ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

이 성립하게 된다. 이렇게 해서 첫번째 문제를 증명해 내었다!

이제 d_1, d_2를 처리하자. d_1을 s에 대해서 미분, d_2를 s에 대해서 미분하면,

$$d_1=\frac{\ln(S)-\ln(K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\frac{\sigma d_1}{\sigma S}=\frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}=\frac{\sigma d_2}{\sigma S}$$

- **F_t 미분하기**

$$\frac{\sigma F}{\sigma t}=\underline{SN'(d_1)}\frac{\sigma d_1}{\sigma t}-rKe^{-r(T-t)}N(d_2)-\underline{Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)}\frac{\sigma d_2}{\sigma t}$$

그런데 아까 구했듯 밑줄친 Term들 끼리는 같다. 따라서 아래와 같이 묶어 줄 수 있다.

밑줄 친 것들끼리 같으므로 아래와 같이 묶어준다.

$$=-rKe^{-r(T-t)}N(d_2)+SN'(D_1)(\frac{\sigma d_1}{\sigma t}-\frac{\sigma d_2}{\sigma t})$$
$$=-rKe^{-r(T-t)}N(d_2)-SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

이 때

$$d_1-d_2=\sigma\sqrt{T-t}$$
$$\frac{\sigma d_1}{\sigma t}-\frac{\sigma d_2}{\sigma t}=\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

- **F_S 미분하기**

이제 F를 S에 대해 미분한 것을 구하자.

$$\frac{\sigma F}{\sigma S}=N(d_1)+\underline{SN'(d_1)}\underline{\frac{\sigma d_2}{\sigma S}}-\underline{Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)}\underline{\frac{\sigma d_2}{\sigma S}}$$

근데 밑줄친 것들끼리 같으므로 서로 소거된다. 따라서,

$$\frac{\sigma F}{\sigma S}=N(d_1)$$

이 된다.

- **F_{SS} 미분하기**

이제 S에 대해 두 번 미분한 녀석도 구한다.

$$\frac{\sigma^2 F}{\sigma S^2}=N'(d_1)\frac{\sigma d_1}{\sigma S}=N'(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

이제 최종적으로 이걸 BSM 에 집어넣고 만족하는 지만 확인하면 된다!!

$$\frac{\sigma F}{\sigma t}+rS\frac{\sigma F}{\sigma S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\sigma^2 F}{\sigma S^2}$$

$$=-rKe^{-r(T-t)}N(d_2)-SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}+rSN(d_1)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2N'(d_1)\frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$=r[SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)]=rF$$

따라서 이 식은 파생상품의 가격이라고 볼 수 있다!!!!!!

◦ **바운더리 컨디션**

$$SN(d_1) - ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

그런데 이건 표준 정규 분포를 따르므로, 극한을 취하면 아래와 같이 볼 수 있다.

S>K => S-K
S<K => 0

이를 한번에 몰아서 쓰면 Max(S_T - K, 0)가 된다.